Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato CN

Diciembre 2017

Problema 1 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{7x^4+2x^3-9x^2+3x-3}{x^3-5x^2+5x-1}$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 7} \dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{8x-5}}{x-7}$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty}(\sqrt{5x^2+3x+5}-\sqrt{5x^2-2x+8}$
4. Calcular n sabiendo que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+5}\right)^{2nx}=5$
5. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\ln(1+x)-\sin x}{2x\sin x}$
6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{7x^4+2x^3-9x^2+3x-3}{x^3-5x^2+5x-1}=-\dfrac{19}{2}$
2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 7} \dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{8x-5}}{x-7}=\dfrac{\sqrt{51}}{17}$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty}(\sqrt{5x^2+3x+5}-\sqrt{5x^2-2x+8})=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
4. Calcular n sabiendo que
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+5}\right)^{2nx}=5\Longrightarrow n=-\frac{\ln 5}{4}$$
5. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\ln(1+x)-\sin x}{2x\sin x}=-\dfrac{1}{4}$
6. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=2$

Problema 2 Calcular las rectas tangente y normal en los sigientes casos:

1. a la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x-5}$ en el punto de abcisa $x=1$.

2. a la función $f(x) = 3x^2e^{x-1}$ en el punto de abcisa $x = 1$.

3. En este caso sólo la recta o rectas tangentes la función $f(x) = \dfrac{x^2+7}{x+3}$ sabiendo que ésta o éstas son paralelas a la recta $y = -2x - 10$.

Solución:

1. $f(1) = -\dfrac{1}{2}$, $f'(x) = \dfrac{x^2 - 10x + 7}{(x-5)^2} \Longrightarrow m = f'(1) = -\dfrac{1}{8}$:

$$\text{Recta tangente}: y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{8}(x-1)$$

$$\text{Recta normal}: y + \frac{1}{2} = 8(x-1)$$

2. $f(1) = 3$, $f'(x) = 3xe^{x-1}(x+2) \Longrightarrow m = f'(1) = 9$:

$$\text{Recta tangente}: y - 3 = 9(x-1)$$

$$\text{Recta normal}: y - 3 = -\frac{1}{9}(x-1)$$

3. $m = f'(a) = -2$:

$$f'(x) = \frac{x^2+6x-7}{(x+3)^2} \Longrightarrow m = f'(a) = \frac{a^2+6a-7}{(a+3)^2} = -2 \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} a = -5,3 \Longrightarrow b = f(-5,3) = -15,3 \Longrightarrow y + 15,3 = -2(x+5,3) \\ a = -0,7 \Longrightarrow b = f(-0,7) = 3,3 \Longrightarrow y - 3,3 = -2(x+0,7) \end{array}\right.$$

Problema 3 Calcular las siguientes integrales

1. Sabiendo que $f'(x) = 5x^2 + 3e^x$ encontrar la función primitiva que pasa por el punto $(0,1)$

2. $\displaystyle\int \left(4x^3 - \frac{3}{1+x^2} - 5\cos x\right) dx$

3. $\displaystyle\int \left(\frac{2x^3 - 5\sqrt[5]{x^2} + 5x}{x^2}\right) dx$

4. $\displaystyle\int 7x(x^2-9)^{16}\, dx$

5. $\displaystyle\int \frac{4x}{5x^2+1}\, dx$

6. $\displaystyle\int 6x^2e^{5x^3+8}\, dx$

Solución:

1. $f(x) = \frac{5x^3}{3} + 3e^x + C$ como $f(0) = 3 \implies 3 + C = 1 \implies C = -2$ luego $f(x) = \frac{5x^3}{3} + 3e^x - 2$.

2. $\displaystyle\int \left(4x^3 - \frac{3}{1+x^2} - 5\cos x\right) dx = x^4 - 3\arctan x - 5\sin x + C$

3. $\displaystyle\int \left(\frac{2x^3 - 5\sqrt[5]{x^2} + 5x}{x^2}\right) dx = x^2 + \frac{25x^{-3/5}}{3} + 5\ln|x| + C$

4. $\displaystyle\int 7x(x^2-9)^{16}\, dx = \frac{7(x^2-9)^{17}}{34} + C$

5. $\displaystyle\int \frac{4x}{5x^2+1}\, dx = \frac{2}{5}\ln(5x^2+1) + C$

6. $\displaystyle\int 6x^2 e^{5x^3+8}\, dx = \frac{2}{5}e^{5x^3+8}$