Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2017

Problema 1 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & m\\ 2 & 4 & 1\\ m & 2 & -1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

se pide:

1. (1 punto) Determinar el rango de B en función de los valores de m.
2. (1 punto) Calcular la matriz inversa de A y comprobar que verifica $A^{-1}=\frac{1}{5}(A^2+3C)$.

(Modelo 2017 - Opción A)

Solución:

1. $|B|=-4m^2+6m-2=0\Longrightarrow m=1,\ m=1/2$ luego si $m\neq 1$ y $m\neq 1/2\Longrightarrow |B|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(B)=3$.
   Si $m=1$: $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $|B|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0\Longrightarrow$ $\text{Rango}(B)=2$.
   Si $m=1/2$: $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/2\\ 2 & 4 & 1\\ 1/2 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $|B|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 1/2 & 2\end{vmatrix}=1\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(B)=2$.
2. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2/5 & 4/5 & 1/5\\ -1/5 & 3/5 & 2/5\\ 2/5 & -1/5 & 1/5\end{pmatrix}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1\\ -1 & 3 & 2\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$.
   $$A^2-3C=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4\\ 2 & -3 & -1\\ -1 & 5 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3\\ -3 & 6 & 3\\ 3 & -6 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$
   Luego $A^{-1}=\dfrac{1}{5}(A^2+3C)$.

Problema 2 *(1 puntos)* Cierta fundación ha destinado 247000 euros para la dotación de 115 becas de estudios. El importe de cada beca es de 3000 euros, si el estudiante cursa un grado universitario; de 2000 euros, si cursa formación profesional y de 1500 euros, si realiza estudios de postgrado. Sabiendo que la fundación ha concedido doble número de becas de formación

profesional que de postgrado, ¿cuántas becas ha concedido a cada nivel de estudios?
(Septiembre 2016 - Opción A)
Solución:
x : nº de becas para grado, y : nº de becas para FP y z : nº de becas para postgrado.

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=115 \\ 3000x+2000y+1500z=247000 \\ y=2z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=115 \\ 6x+4y+3z=494 \\ y-2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=31 \\ y=56 \\ z=28 \end{array}\right.$$

Problema 3 *(2 puntos)*

1. (1,5 puntos). Hallar X e Y, matrices 2×2, tales que

$$X+\left(\begin{array}{cc} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{array}\right)Y=\left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{array}\right), \quad X+\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right)Y=\left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

.

2. (0,5 puntos). Hallar Z, matriz invertible 2×2, tal que

$$Z^2\left(\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{array}\right)Z^{-1}=\left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{array}\right)$$

.

(Modelo 2015 - Opción B)

Solución:

1.

$$\left\{\begin{array}{l} X+\left(\begin{array}{cc} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{array}\right)Y=\left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{array}\right) \\ \\ X+\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right)Y=\left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} X=\left(\begin{array}{cc} -1 & 3 \\ -5 & -1 \end{array}\right) \\ \\ Y=\left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{array}\right) \end{array}\right.$$

.

2. $Z^2\cdot 3I\cdot Z^{-1}=3Z\cdot Z\cdot Z^{-1}=3Z=\left(\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{array}\right)\Longrightarrow Z=\left(\begin{array}{cc} 1/3 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{array}\right)$

El siguiente problema es opcional que podrás cambiarlo por el primero o por el tercero, en caso de hacer los tres se contará para la nota los dos de peor puntuación.

Problema 4 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -mx+ & my+ & z= & 0 \\ x- & my+ & 3z= & 4 \\ 2x- & 2y- & z= & 0 \end{array}\right.$$

1. (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro m.
2. (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 0$.
3. (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 2$.

(Septiembre 2015 - Opción A)
Solución:

1. $$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -m & m & 1 & 0 \\ 1 & -m & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad |A| = -m^2+3m-2 = 0 \Longrightarrow m = 1, \ \ m = 2$$

   Si $m \neq 1$ y $m \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas, sería un sistema compatible determinado.
   Si $m = 1$:

   $$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right); \ |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{array}\right| = -4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

   Como
   $$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{array}\right| = -4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

   Luego, en este caso, el sistema es incompatible.
   Si $m = 2$:

   $$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right); \ |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{array}\right| = -6 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

   Como $F_3 = -F_1 \Longrightarrow$Rango$(\overline{A})$ =2. En este caso el sistema es compatible indeterminado.

2. para $m = 0$:
   $$\left\{\begin{array}{c} z = 0 \\ x + 3z = 4 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

3. para $m = 2$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -2x+ & 2y+ & z = & 0 \\ x- & 2y+ & 3z = & 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -4 + 4\lambda \\ y = -4 + \frac{7}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$