# Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2014) Selectividad-Opción A

**Tiempo: 90 minutos**

**Problema 1** *(2 puntos)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcúlese $(A^tB)^{-1}$, donde $A^t$ denota a la traspuesta de la matriz $A$.

b) Resuélvase la ecuación matricial $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

**Solución:**

a)

$$A^tB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^tB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2x + y = 0 \\ -x = -1 \\ x - 2y = 5 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \end{array} \right.$$

**Problema 2** *(2 puntos)* Se consideran la función $f(x, y) = 5x - 2y$ y la región del plano $S$ definida por el siguiente conjunto de restricciones:

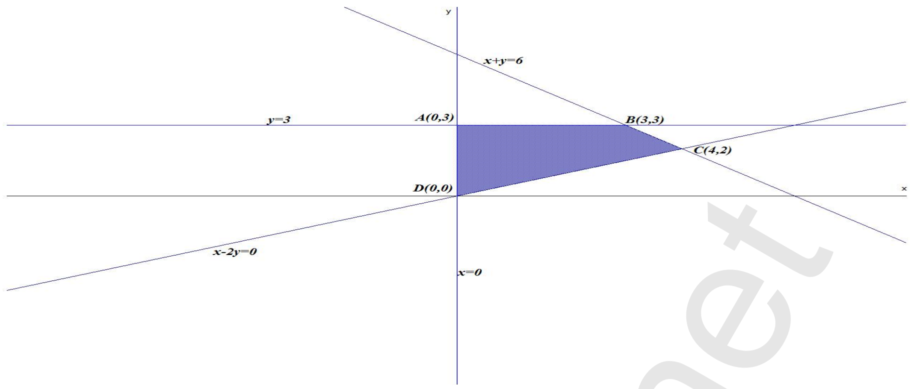
$$x - 2y \le 0, \;\; x + y \le 6, \;\; x \ge 0, \;\; y \le 3$$

a) Represéntese la región $S$.

b) Calcúlense las coordenadas de los vértices de la región $S$ y obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f$ en $S$ indicando los puntos donde se alcanzan.

**Solución:**

a) La región $S$ pedida será:




b)

$$\begin{cases} z(0,3) = -6 \ \text{Mínimo} \\ z(3,3) = 9 \\ z(4,2) = 16 \ \text{Máximo} \\ z(0,0) = 0 \end{cases}$$

El máximo es de 16 y se alcanza en el punto $C(4,2)$. El mínimo es de -4 y se alcanza en el punto $A(0,2)$.

**Problema 3** *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} x+a & \text{si} \quad x<1 \\ x^2-2 & \text{si} \quad 1 \le x \le 3 \\ x+b & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

a) Determínense $a$ y $b$ para que $f$ sea continua en todo $R$.

b) Calcúlese $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$.

**Solución:**

a) Para que $f$ sea continua en $x=1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (x+a) = 1+a$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} (x^2-2) = -1$$

$$1+a = -1 \Longrightarrow a = -2$$

Para que $f$ sea continua en $x=3$:

$$\lim_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 3^-} (x^2-2) = 7$$

$$\lim_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 3^+} (x+b) = 3+b$$

$$7 = 3+b \Longrightarrow b = 4$$

b)

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 \left(x^2-2\right)\,dx = \left.\frac{x^3}{3}-2x\right]_1^3 = \frac{14}{3}$$

**Problema 4** *(2 puntos)* Sean las funciones reales de variable real

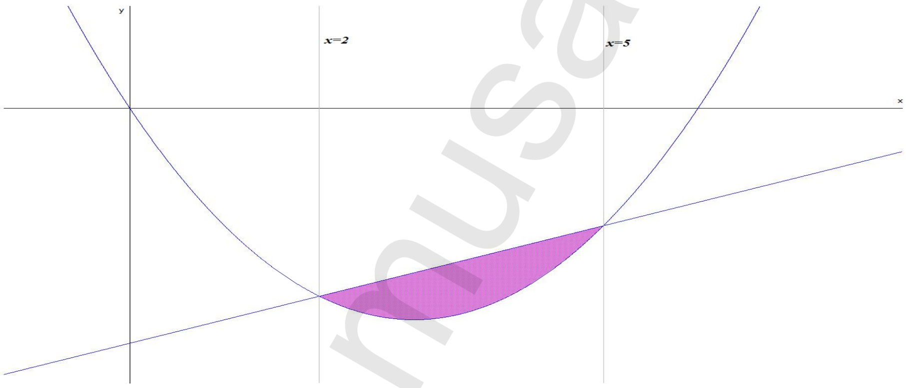
$$f(x) = x^2 - 6x, \quad g(x) = x - 10$$

a) Represéntense gráficamente las funciones $f$ y $g$.

b) Calcúlese el área del recinto plano acotado por las gráficas de las funciones $f$ y $g$.

**Solución:**

a) Gráfica:




b) $x^2 - 6x = x - 10 \Longrightarrow x = 2$ y $x = 5$.

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\,dx = \int (x^2 - 7x + 10)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 10x$$

$$S_1 = \int_2^5 (f(x) - g(x))\,dx = F(5) - F(2) = -\frac{9}{2}$$

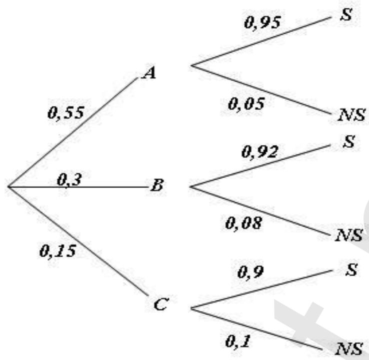
$$S = |S_1| = \left|-\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2}\;u^2$$

**Problema 5** *(2 puntos)* Una tienda de trajes de caballero trabaja con tres sastres. Un 5 % de los clientes atendidos por el sastre $A$ no queda satisfecho, tampoco el 8 % de los atendidos por el sastre $B$ ni el 10 % de los atendidos por el sastre $C$. El 55 % de los arreglos se encargan al satre $A$, el 30 % al $B$ y el 15 % restante al $C$. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Un cliente no quede satisfecho con el arreglo.

b) Si un cliente no ha quedado satisfecho, le haya hecho el arreglo el sastre $A$

**Solución:**




a) $P(NS) = 0,55 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,08 + 0,15 \cdot 0,1 = 0,0665$

b) $P(A|NS) = \dfrac{P(NS|A)}{P(NS} = \dfrac{0,05 \cdot 0,55}{0,0665} = 0,4135$

## Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2014) Selectividad-Opción B

**Tiempo: 90 minutos**

**Problema 1** *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real $a$:

$$\left\{\begin{array}{r} x + y + az = 2 \\ 3x + 4y + 2z = a \\ 2x + 3y - z = 1 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de $a$.

b) Resuélvase el sistema en el caso $a = -1$.

**Solución:**

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & a & 2 \\ 3 & 4 & 2 & a \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = a - 3 = 0 \Longrightarrow a = 3$$

- Si $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left( \begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right); \quad |A| = 0, \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{array} \right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como $F_3 = F_2 - F_1 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2$. Como Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Si $a = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y - z = 2 \\ 3x + 4y + 2z = -1 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

**Problema 2** *(2 puntos)* Dada la función real de variable real $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x$.

a) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f$ en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Calcúlese $\int_2^3 f(x)dx$.

**Solución:**

a) $f'(x) = 12x^2 - 6x - 2$:

$$b = f(1) = -1, \quad m = f'(1) = 4, \Longrightarrow \; y + 1 = 4(x - 1)$$

.

b) $\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (4x^3 - 3x^2 - 2x)dx = x^4 - x^3 - x^2\Big]_2^3 = 41$

**Problema 3** *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$$

a) Determínense sus asíntotas.

b) Determínense el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f$.

**Solución:**

a) Verticales: $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x^2}{x-2} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x^2}{x-2} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$

Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x-2} = \infty$$

Oblicuas: $y = mx + n \Longrightarrow y = x + 2$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 2x} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x\right) = 2$$

b) $Dom(f) = R - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = 4$$

| | $(-\infty, 0)$ | $(0, 4)$ | $(4, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | creciente $\nearrow$ | decreciente $\searrow$ | creciente $\nearrow$ |

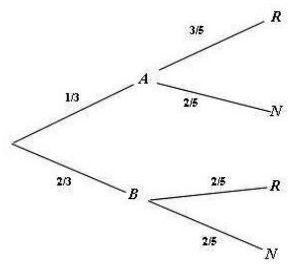
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ y decrece en el intervalo $(0, 2) \cup (2, 4)$. La función tiene un mínimo relativo en el punto $(4, 8)$ y un máximo relativo en el punto $(0, 0)$.

**Problema 4** *(2 puntos)* Se dispone de un dado cúbico equilibrado y dos urnas $A$ y $B$. La urna $A$ contiene 3 bolas rojas y 2 negras; la urna $B$ contiene 2 rojas y 3 negras. Lanzamos el dado: si el número obtenido es 1 ó 2 extraemos una bola de la urna $A$; en caso contrario extraemos una bola de la urna $B$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola roja?

b) Si la bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna $A$?

**Solución:**




a)

$$P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5} = \frac{7}{15}$$

b)

$$P(A|R) = \frac{P(R|A)P(A)}{P(R)} = \frac{3/5\cdot 1/3}{7/15} = \frac{3}{7}$$

**Problema 5** *(2 puntos)* Una industria química elabora plásticos de dos calidades diferentes. Para ello tiene 2 máquinas, $A$ y $B$. Es necesario que fabrique un mínimo de 20 toneladas de plástico superior y 13 de plástico medio. Cada hora que trabaja la máquina $A$, fabrica 7 toneladas de plástico superior y 2 de plástico medio, mientras que la máquina $B$ produce 2 y 3 toneladas, respectivamente. Además, la máquina $A$ no puede trabajar más de 9 horas, ni más de 10 horas la máquina $B$. El coste de funcionamiento de las máquinas es de 800 euros/hora para $A$ y de 600 euros/hora para $B$. Calcúlese cuántas horas debe funcionar cada máquina para que el coste total de funcionamiento sea mínimo y cuál es ese coste mínimo.

**Solución:**

$x$ : número de horas de funcionamiento de la máquina $A$ e $y$ : número de horas de funcionamiento de la máquina $B$

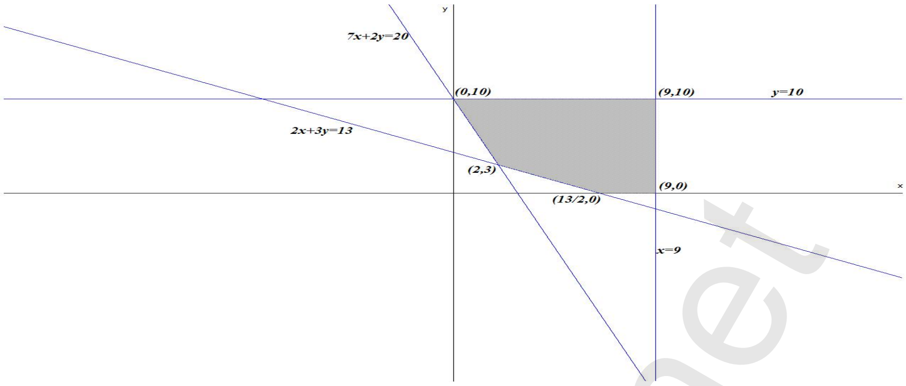
| | Tm plástico superior | Tm plástico medio | coste |
|---|---|---|---|
| $A$ | 7 | 2 | 800 |
| $B$ | 2 | 3 | 600 |
| | 20 | 13 | |

Función Objetivo: $f(x, y) = 800x + 600y$

$$\begin{cases} 7x + 2y \geq 20 \\ 2x + 3y \geq 13 \\ 0 \leq x \leq 9 \\ 0 \leq y \leq 10 \end{cases}$$

La región $S$ pedida será:

Los vértices serían: $(2, 3)$, $(13/2, 0)$ $(9, 0)$, $(9, 10)$ y $(0, 10)$.




$$\begin{cases} f(2,3) = 3400 \text{ Mínimo} \\ f(13/2,0) = 5200 \\ f(9,0) = 7200 \\ f(9,10) = 13200 \\ f(0,10) = 6000 \end{cases}$$

El mínimo coste se produce cuando la máquina $A$ trabaja 2 horas y 3 horas la $B$ con un coste de 3400 euros.