# Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Septiembre 2017)
## Selectividad-Opción A
**Tiempo: 90 minutos**

---

**Problema 1** *(2 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro real $a$:

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y-z=-2\\ -2x-az=2\\ y+az=-2\end{array}\right.$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro $a$.

b) Resuélvase para $a=4$.

**Solución:**

a)

$$A=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & -2\\ -2 & 0 & -a & 2\\ 0 & 1 & a & -2\end{array}\right);\quad |A|=2-3a=0\Longrightarrow a=2/3$$

- Si $a\neq 2/3\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=2/3$:

$$A=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & -2\\ -2 & 0 & -2/3 & 2\\ 0 & 1 & 2/3 & -2\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2+2F_1\\ F_3\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & -2\\ 0 & 4 & -8/3 & -2\\ 0 & 1 & 2/3 & -2\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ 4F_3+F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & -2\\ 0 & 4 & -8/3 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -10\end{array}\right)$$

Luego en este caso el sistema es incompatible.

b) $a=4$:

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y-z=-2\\ -2x-4z=2\\ y+4z=-2\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=2\\ z=-1\end{array}\right.$$

**Problema 2** *(2 puntos)* Se considera la región del plano $S$ definida por:

$$1\le x\le 5;\quad 2\le y\le 6;\quad x-y\ge -4;\quad 3x-y\le 10.$$

a) Represéntese gráficamente la región $S$ y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

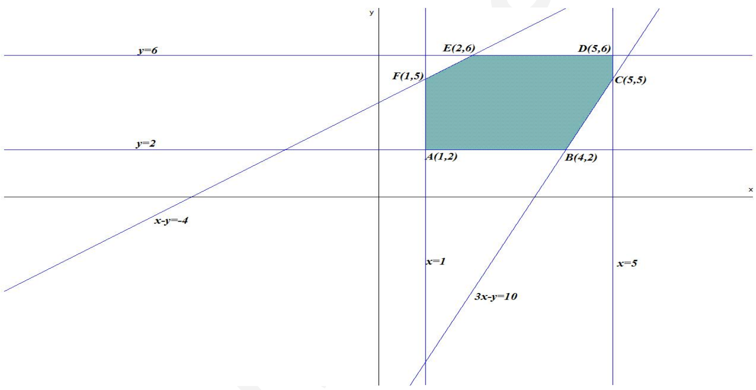
b) Calcúlese los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = -200x + 600y$ en la región $S$ y obténgase los puntos de $S$ donde se alcanzan dichos valores.

**Solución:**

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x, y) = -200x + 600y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} 1 \le x \le 5 \\ 2 \le y \le 6 \\ x - y \ge -4 \\ 3x - y \le 10 \end{cases}$$

La región $S$ y los vértices a estudiar serán: $A(1, 2)$, $B(4, 2)$, $C(5, 5)$,




$D(5, 6)$, $E(2, 6)$, $F(1, 5)$:

b)

$$\begin{cases} f(1, 2) = 1000 \\ f(4, 2) = 400 \text{ Mínimo} \\ f(5, 5) = 2000 \\ f(5, 6) = 2600 \\ f(2, 6) = 3200 \text{ Máximo} \\ f(1, 5) = 2800 \end{cases}$$

El mínimo es 400 y se alcanza en el punto $B(4, 2)$ y el máximo es de 3200 y se alcanza en el punto $E(2, 6)$.

**Problema 3** *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 + x - 2 & \text{si} \quad x \ge -1 \end{cases}$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real $a$ para que $f(x)$ sea una función continua en todo su dominio.

b) Para $a = 2$, calcúlense los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes cartesianos. Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

**Solución:**

a) Continuidad en $x = -1$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} (ax+1) = -a+1 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} (x^2+x-2) = -2 \end{array}\right. \Longrightarrow -a+1 = -2 \Longrightarrow a = 3$$

b) para $a = 2$ es $f(x) = \left\{\begin{array}{rcl} 2x+1 & \text{si} & x < -1 \\ x^2+x-2 & \text{si} & x \geq -1 \end{array}\right.$

- Si $x < -1$ la recta $f(x) = 2x+1 \Longrightarrow f'(x) = 2 > 0$ es siempre creciente (en $(-\infty, -1)$ y no llegaría a cortar ni al eje de abcisas ni al de cordenadas.
- Si $x \geq -1$: $f(x) = x^2+x-2 \Longrightarrow f'(x) = 2x+1 = 0 \Longrightarrow x = -1/2$ por la segunda derivada $f''(x) = 2 > 0$ luego $x = -1/2$ es un mínimo, por tanto, la función es decreciente en el intervalo $(-1, -1/2)$ y creciente en el $(-1/2, \infty)$.
  Haciendo $x = 0$ tendrá un punto de corte con $OY$ en $(0, -2)$ y con $OX$ se calcularían haciendo $f(x) = 0 \Longrightarrow x^2+x-2 = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = -2$ no está en la rama, luego el único punto de corte con el eje de abcisas será $(1, 0)$.

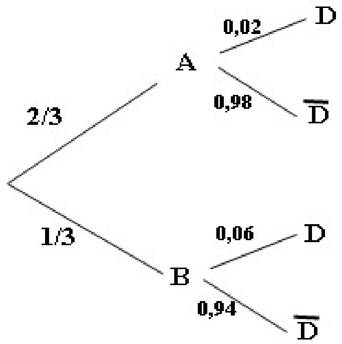
**Problema 4** *(2 puntos)* Una empresa fabrica dos modelos de ordenadores portátiles $A$ y $B$, siendo la producción del modelo $A$ el doble que la del modelo $B$. Se sabe que la probabilidad de que un ordenador portátil del modelo $A$ salga defectuoso es de 0,02, mientras que esa probabilidad en el modelo $B$ es de 0,06. Calcúlese la probabilidad de que un ordenador fabricado por dicha empresa elegido al azar:

a) No salga defectuoso.

b) Sea del modelo $A$, si se sabe que ha salido defectuoso.

**Solución:**

a) $P(\overline{D}) = P(A)P(\overline{D}|A) + P(B)P(\overline{D}|B) = \dfrac{2}{3} \cdot 0,98 + \dfrac{1}{3} \cdot 0,94 = 0,967$




b) $P(A|D) = \dfrac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \dfrac{0,02 \cdot 2/3}{1 - 0,967} = 0,404$

**Problema 5** *(2 puntos)* El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media $\mu$, y desviación típica $\sigma = 24$ horas. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 16. Calcúlese:

a) La probabilidad de que la media muestral del tiempo,$\overline{X}$, supere las 48 horas, si $\mu = 36$ horas.

b) El nivel de confianza con el que se ha calculado el intervalo $(24,24; 47,76)$ para $\mu$.

**Solución:**

$N(\mu, 24)$ y $n = 16$

a) $P(\overline{X} \geq 48) = P\left(Z \geq \dfrac{48-36}{24/\sqrt{16}}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

b) $E = \dfrac{47,76 - 24,24}{2} = 11,76$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 11,76 = z_{\alpha/2}\frac{24}{\sqrt{16}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$

Luego el nivel de confianza es del 95 %:

$P(Z \leq z_{\alpha/2}) = P(Z \leq 1,96) = 0,975 = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow NC = 95\,\%$

## Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Septiembre 2017) Selectividad-Opción B

**Tiempo: 90 minutos**

**Problema 1** *(2 puntos)* Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determínese la matriz $C^{40}$.

b) Calcúlese la matriz $X$ que verifica $X \cdot A + 3B = C$

**Solución:**

a) $C^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.
$C^{40} = (C^2)^{20} = I^{20} = I$

b) $XA + 3B = C \Longrightarrow XA = C - 3B \Longrightarrow X = (C - 3B)A^{-1}$:

$C - 3B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Problema 2** *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - 2}$$

a) Estúdiense sus asíntotas.

b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

**Solución:**

a) Asíntotas:

- Verticales:
  En $x = 2/3$:

$$\lim_{x \longrightarrow (2/3)^-} \frac{x^2 - 1}{3x - 2} = \left[\frac{-5/9}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{3x - 2} = \left[\frac{-5/9}{0^+}\right] = -\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^2-1}{3x-2}=\infty;\quad \lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{x^2-1}{3x-2}=-\infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2x}=\frac{1}{3}$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^2-1}{3x-2}-\frac{x}{3}\right)=\frac{2}{9}$$

Luego la asíntota oblicua es $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{9}$

b) $f'(x)=\dfrac{3x^2-4x+3}{(3x-2)^2}=0\Longrightarrow 3x^2-4x+3=0$ no tiene solución y $f'(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}-\{2/3\}\Longrightarrow f$ creciente en $\mathbb{R}-\{2/3\}$.

**Problema 3** *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x)=x^2+ax$$

a) Calcúlese el valor del parámetro real $a$ para que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x=2$. Determínese si se trata de un máximo o un mínimo local.

b) Para $a=-2$, hállese el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ y $x=2$.

**Solución:**

a) $f'(x)=2x+a$ luego $f'(2)=4+a=0\Longrightarrow a=-4$. Como $f''(x)=2\Longrightarrow f''(2)=2>0\Longrightarrow x=2$ es un mínimo.

b) Si $a=-2\Longrightarrow f(x)=x^2-2x=0\Longrightarrow x=0$ y $x=2$:

$$S_1=\int_0^2(x^2-2x)\,dx=\left.\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2=-\frac{4}{3}$$

$$S=|S_1|=\left|\frac{4}{3}\right|=\frac{4}{3}\ u^2$$

**Problema 4** *(2 puntos)* La probabilidad de que cierto río esté contaminado por nitratos es 0'6, por sulfatos es 0,4, y por ambos es 0,2. Calcúlese la probabilidad de que dicho río:

a) No esté contaminado por nitratos, si se sabe que está contaminado por sulfatos.

b) No esté contaminado ni por nitratos ni por sulfatos.

**Solución:**
$N$: contaminado con niitratos y $S$: contaminado con sulfatos.
$P(N) = 0,6$, $P(S) = 0,4$, $P(N \cap S) = 0,2$, $P(\overline{N}) = 0,4$ y $P(\overline{S}) = 0,6$

a) $P(\overline{N}|S) = \dfrac{P(\overline{N} \cap S)}{P(S)} = \dfrac{P(S) - P(N \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,4 - 0,2}{0,4} = 0,5$

b) $P(\overline{N} \cap \overline{S}) = P(\overline{N \cup S}) = 1 - P(N \cup S) = 1 - (P(N) + P(S) - P(N \cap S)) = 1 - (0,6 + 0,4 - 0,2) = 0,2$

**Problema 5** *(2 puntos)* La longitud auricular de la oreja en varones jóvenes, medida en centímetros (cm), se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media $\mu$ y desviación típica $\sigma = 0,6$ cm.

a) Una muestra aleatoria simple de 100 individuos proporcionó una media muestral $\overline{X} = 7$ cm. Calcúlese un intervalo de confianza al 98 % para $\mu$.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de $\mu$ por la media muestral sea a lo sumo de 0,1 cm, con un nivel de confianza del 98 %?

**Solución:**

$$N(\mu; 0,6)$$

a) $\sigma = 0,6$, $n = 100$, $z_{\alpha/2} = 2,325$ y $\overline{X} = 7$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325\frac{0,6}{\sqrt{100}} = 0,1395$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (6,8605; 7,1395)$$

b) $z_{\alpha/2} = 2,325$ y $E = 0,1$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325\frac{0,6}{\sqrt{n}} = 0,1 \Longrightarrow n \geq 194,6025$$

$$n = 195$$