Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2017) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 0.1 *(2 puntos)* Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -k \\ 1 & -2 & 1 \\ k & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Discútase para qué valores del parámetro real k la matriz A tiene matriz inversa.

b) Determínese para $k = 0$ la matriz X que verifica la ecuación $A \cdot X = B$.

Solución:

a) $|A| = -2k^2 + 2 = 0 \Longrightarrow k = \pm 1$:
Si $k = \pm 1 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$
Si $k \neq \pm 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

b) Si $k = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1/2 & -1/2 & -2 \\ 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

Problema 0.2 *(2 puntos)* Considérese la región del plano S definida por:

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 6y \geq 6; \quad 5x - 2y \geq -2; \quad x + 3y \leq 20; \quad 2x - y \leq 12\right\}$$

a) Represéntese gráficamente la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

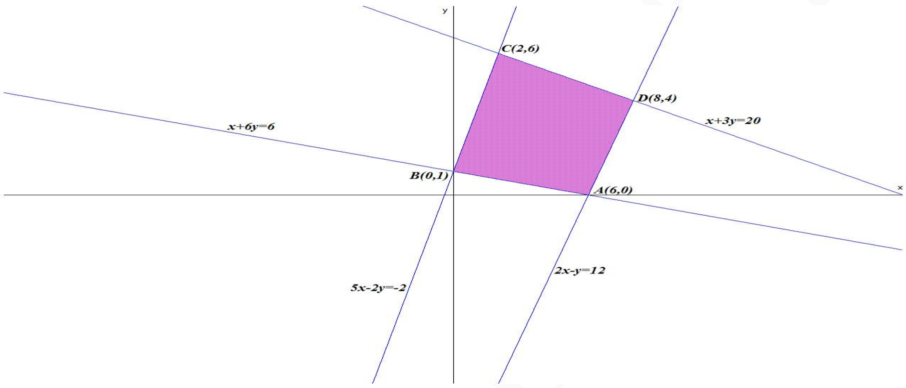
b) Determínense los puntos en los que la función $f(x, y) = 4x - 3y$ alcanza sus valores máximo y mínimo en S, indicando el valor de $f(x, y)$ en dichos puntos.

Solución:

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x, y) = 4x - 3y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} x + 6y \geq 6 \\ 5x - 2y \geq -2 \\ x + 3y \leq 20 \\ 2x - y \leq 12 \end{cases}$$

La región S y los vértices a estudiar serán: $A(6, 0)$, $B(0, 1)$, $C(2, 6)$,



y $D(8, 4)$:

b)

$$\begin{cases} f(6, 0) = 24 \ \text{Máximo} \\ f(0, 1) = -3 \\ f(2, 6) = -10 \ \text{Mínimo} \\ f(8, 4) = 20 \end{cases}$$

El mínimo es -10 y se alcanza en el punto $C(2, 6)$ y el máximo es de 24 y se alcanza en el punto $A(6, 0)$.

Problema 0.3 *(2 puntos)*

a) Determínese el valor de la derivada de la función $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + x}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Estúdiense las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{e^x(1 + x) - e^x}{(1 + x)^2} = \dfrac{xe^x}{(1 + x)^2} \Longrightarrow f'(0) = 0$

b) Asíntotas:

- Verticales:
  En $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

  En $x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = \left[\frac{-1}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3}{1-x^2} = -\infty; \quad \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3}{x - x^3} = -1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} + x\right) = 0$$

  Luego la asíntota oblicua es $y = -x$

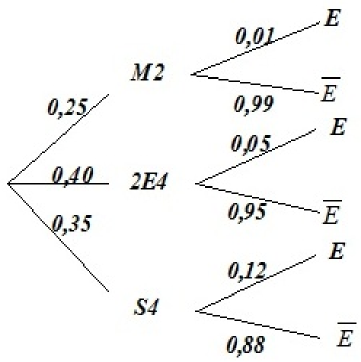
Problema 0.4 *(2 puntos)* Una empresa de reparto de paquetería clasifica sus furgonetas en función de su antigüedad. El 25 % de sus furgonetas tiene menos de dos años de antigüedad, el 40 % tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y el resto tiene una antigüedad superior a cuatro años. La probabilidad de que una furgoneta se estropee es 0,01 si tiene una antigüedad inferior a dos años; 0,05 si tiene una antigüedad entre dos y cuatro años y 0,12 si tiene una antigüedad superior a cuatro años. Se escoge una furgoneta al azar de esta empresa. Calcúlese la probabilidad de que la furgoneta escogida:

a) Se estropee.

b) Tenga una antigüedad superior a cuatro años sabiendo que no se ha estropeado.

Solución:

a) $P(E) = P(M2)P(E|M2) + P(2E4)P(E|2E4) + P(S4)P(E|S4) = 0,25 \cdot 0,01 + 0,40 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,12 = 0,0645$



b) $P(S4|\overline{E}) = \dfrac{P(\overline{E}|S4)P(S4)}{P(\overline{E})} = \dfrac{0,35 \cdot 0,88}{1 - 0,0645} = 0,329$

Problema 0.5 *(2 puntos)* El peso en canal, en kilogramos (kg), de una raza de corderos a las seis semanas de su nacimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 0,9 kg.

a) Se tomó una muestra aleatoria simple de 324 corderos y el peso medio observado fue $x = 7,8$ kg. Obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 99,2 % para μ.

b) Determínese el tamaño mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple de la variable para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 0,2 kg.

Solución:

a) $\sigma = 0,9$, $n = 324$, $z_{\alpha/2} = 2,65$ y $\overline{X} = 7,8$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,65\frac{0{,}9}{\sqrt{324}} = 0,1325$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (7,6675; 7,9325)$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $E = 0,1$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{0,9}{\sqrt{n}} = 0,1 \Longrightarrow n \geq 311,1696$$

$$n = 312$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2017) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 0.1 *(2 puntos)* Considérese el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} x - ay + 2z = 0 \\ ax - 4y - 4z = 0 \\ (2-a)x + 3y - 2z = 0 \end{array}\right.$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a = 3$.

Solución:
Se trata de un sistema Homogéneo

a)

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -a & 2 \\ a & -4 & -4 \\ 2-a & 3 & -2 \end{array}\right); \quad |A| = -6(a^2 - a - 6) = 0 \Longrightarrow a = -2, \ \ a = 3$$

- Si $a \neq -2$ y $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única $x = y = z = 0$)
- Si $a = -2$ o $a = 3 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones)

b) Si $a = 3$:

$$\left\{\begin{array}{c} x - 3y + 2z = 0 \\ 3x - 4y - 4z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 0.2 *(2 puntos)* Considérese la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 - 3x$$

a) Calcúlense $\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{1 - x^3}$ y $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

b) Estúdiense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) $\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{1 - x^3} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x}{1 - x^3} = -1$

$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^3 - 3x}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x(x^2 - 3)}{x} = -3$

b) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-1, 1)$.

La función tiene un mínimo en $(1, -2)$ y un máximo en $(-1, 2)$.

Problema 0.3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+2} & \text{si} \quad x \le 0 \\ x+2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de $f(x)$ en R.

b) Calcúlese $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{2}{x+2} = 1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (x+2) = 2 \end{cases}$$

Luego f es discontinua no evitable en $x = 0$, hay un salto. Tampoco lo es en $x = -2$ donde hay una asíntota vertical, en conclusión: f es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{2}{x+2}\,dx = 2\ln|x+2|]_{-1}^{0} = 2\ln 2.$

Problema 0.4 *(2 puntos)* El 30 % de los individuos de una determinada población son jóvenes. Si una persona es joven, la probabilidad de que lea prensa al menos una vez por semana es 0,20. Si una persona lee prensa al menos una vez por semana, la probabilidad de que no sea joven es 0,9. Se escoge una persona al azar. Calcúlese la probabilidad de que esa persona:

a) No lea prensa al menos una vez por semana.

b) No lea prensa al menos una vez por semana o no sea joven.

Solución:
J: joven y L: lee el periódico.
$P(J) = 0,3$, $P(\overline{J}) = 0,7$, $P(L|J) = 0,2$ y $P(\overline{J}|L) = 0,9$

a) $P(L|J) = \dfrac{P(L \cap J)}{P(J)} \Longrightarrow P(L \cap J) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$

$$P(\overline{J}|L) = \frac{P(\overline{J} \cap L)}{P(L)} = \frac{P(L) - P(J \cap L)}{P(L)} = \frac{P(L) - 0,06}{P(L)} = 0,9$$

$$\Longrightarrow P(L) = 0,6 \Longrightarrow P(\overline{L}) = 0,4$$

b) $P(\overline{L} \cup \overline{J}) = P(\overline{L \cap J}) = 1 - P(L \cap J) = 1 - 0,06 = 0,94$

Problema 0.5 *(2 puntos)* El peso en toneladas (T) de los contenedores de un barco de carga se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 3$ T. Se toma una muestra aleatoria simple de 484 contenedores.

a) Si la media de la muestra es $\overline{x} = 25,9$ T, obténgase un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para μ.

b) Supóngase ahora que $\mu = 23$ T. Calcúlese la probabilidad de que puedan transportarse en un barco cuya capacidad máxima es de 11000 T.

Solución:

$$N(\mu; 3)$$

a) $\sigma = 3$, $n = 484$, $z_{\alpha/2} = 1,645$ y $\overline{X} = 25,9$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645\frac{3}{\sqrt{484}} = 0,2243$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (25,676; 26,9124)$$

b) $\mu = 23$, $n = 484 \Longrightarrow \overline{X} = 11000/484 = 22,73$ la probabilidad pedida sería

$$P\left(\overline{X} \le 22,73\right) = P\left(Z \ge \frac{22,73 - 23}{3/\sqrt{484}}\right) = P\left(Z \le -2\right) = 1 - P\left(Z \le 2\right) =$$

$$1 - 0,9772 = 0,0228$$