Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Mayo 2017

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2-1}$$

a) Calcúlense sus asíntotas.

b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

a) Asíntotas:

- **Verticales:**
  $x = 1$
  $$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{3x^2+1}{x^2-1} = \pm\infty$$
  $$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{3x^2+1}{x^2-1} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$
  $$\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{3x^2+1}{x^2-1} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$
  $x = -1$
  $$\lim_{x\longrightarrow -1} \frac{3x^2+1}{x^2-1} = \pm\infty$$
  $$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{3x^2+1}{x^2-1} = \left[\frac{4}{0^+}\right] = +\infty$$
  $$\lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{3x^2+1}{x^2-1} = \left[\frac{4}{0^-}\right] = -\infty$$
- **Horizontales:** $y = 3$
  $$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{3x^2+1}{x^2-1} = 2$$
- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales

b)

$$f'(x) = -\frac{8x}{(x^2-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$.

La función es decreciente en el intervalo $(0, 1) \cup (1, \infty)$.

La función tiene un máximo en $(0, -1)$.

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5x-b}{x-2} & \text{si} \quad x \le 1 \\ \frac{x^2-4x+3}{x^2+4x-5} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Determínese para qué valores del parámetro b la función $f(x)$ es continua en $x = 1$.

b) Calcúlense las asíntotas de $f(x)$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{5x-b}{x-2} = b - 5 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2+4x-5} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} \dfrac{2x-4}{2x+4} = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Luego $b - 5 = -\frac{1}{3} \Longrightarrow b = 14/3$

b) Asíntotas:

- Si $x \le 1$ no hay asíntotas verticales ($x = 2$ no está en la rama). Si hay horizontales $y = 5$ y, por tanto, no hay oblicuas.

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{5x-b}{x-2} = 5$$

- Si $x > 1$ no hay asíntotas verticales, los valores que anulan el denominador ($x = 1$ y $x = -5$) no están en la rama. Si hay horizontales $y = 1$ y, por tanto, no hay oblicuas.

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^2-4x+3}{x^2+4x-5} = 1$$

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 - 27$$

.

a) Determínese el área de la región acotada delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y por las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

a) $x^3 - 27 = 0 \Longrightarrow x = 3$ luego hay que separar dos áreas S_1 en el intervalo $[0, 3]$ y S_2 en el intervalo $[3, 4]$.

$$S_1 = \int_0^3 (x^3 - 27)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} - 27x\right]_0^3 = -\frac{243}{4}$$

$$S_2 = \int_3^4 (x^3 + 1)\, dx = \left.\frac{x^4}{4} - 27x\right]_3^4 = \frac{67}{4}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{243}{4} + \frac{67}{4} = \frac{155}{2}\ u^2$$

b) $b = f(2) = -19$, $f'(x) = 3x^2$, $m = f'(2) = 12$. La ecuación de la recta tangente es: $y + 19 = 12(x - 2)$

Problema 4 *(2 puntos)* Se dispone de un dado cúbico equilibrado y dos urnas A y B. La urna A contiene 3 bolas rojas y 2 negras; la urna B contiene 2 rojas y 3 negras. Lanzamos el dado: si el número obtenido es 1 ó 2 extraemos una bola de la urna A; en caso contrario extraemos una bola de la urna B.

a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola roja?

b) Si la bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la urna A?

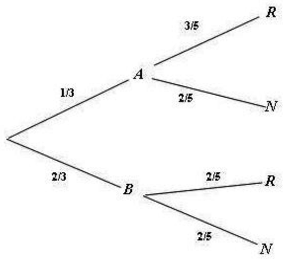
Solución:

a)

$$P(R) = P(R|A)P(A) + P(R|B)P(B) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5} = \frac{7}{15}$$

b)

$$P(A|R) = \frac{P(R|A)P(A)}{P(R)} = \frac{3/5 \cdot 1/3}{7/15} = \frac{3}{7}$$



Problema 5 *(2 puntos)* El precio de ciertos electrodomésticos puede considerarse como una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 100 euros. Los precios en euros correspondientes a una muestra de 9 de estos electrodomésticos son

255 85 120 290 80 80 275 290 135

a) Construir un intervalo de confianza al 98 % para la media poblacional.

b) Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra, para que con un nivel de confianza del 99 %, el error de estimación del precio no supere los 50 euros

(Junio 2004 - Opción B)
Solución:

$N(\mu, 100)$, normal de media μ y desviación típica $\sigma = 100$, $\overline{X} = 178,89$.

a)

$$1-\alpha = 0,98 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,01 \Longrightarrow P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,99 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,325$$

$$I.C. = \left(\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$\left(178,89 - 2,32\frac{100}{\sqrt{9}}; 178,89 + 2,32\frac{100}{\sqrt{9}}\right) = (101,47; 256,31)$$

b)

$$1-\alpha = 0,99 \Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005 \Longrightarrow P(z \le z_{\alpha/2}) = 0,995 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575$$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 50 = 2,575\frac{100}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \sqrt{n} = \frac{2,575 \cdot 100}{50} \Longrightarrow n = 26,52$$

Luego $n = 27$.