Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Mayo 2017

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 25}$$

a) Calcúlense sus asíntotas.

b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

a) Asíntotas:

- **Verticales:**
  $x = 5$
  $$\lim_{x\longrightarrow 5} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 25} = \pm\infty$$
  $$\lim_{x\longrightarrow 5^-} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 25} = \left[\frac{43}{0^-}\right] = -\infty$$
  $$\lim_{x\longrightarrow 5^+} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 25} = \left[\frac{43}{0^+}\right] = +\infty$$
  $x = -5$
  $$\lim_{x\longrightarrow -5} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 25} = \pm\infty$$
  $$\lim_{x\longrightarrow -5^-} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 25} = \left[\frac{43}{0^+}\right] = +\infty$$
  $$\lim_{x\longrightarrow -5^+} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 25} = \left[\frac{43}{0^-}\right] = -\infty$$
- **Horizontales:** $y = 2$
  $$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 25} = 2$$
- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales

b)

$$f'(x) = -\frac{84x}{(x^2-25)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -5) \cup (-5, 0)$.

La función es decreciente en el intervalo $(0, 5) \cup (5, \infty)$.

La función tiene un máximo en $(0, 8/25)$.

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+b}{x+2} & \text{si} \quad x \le 1 \\ \frac{x^2-7x+6}{x^2+x-2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Determínese para qué valores del parámetro b la función $f(x)$ es continua en $x = 1$.

b) Calcúlense las asíntotas de $f(x)$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{2x+b}{x+2} = \dfrac{2+b}{3} \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{x^2-7x+6}{x^2+x-2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} \dfrac{2x-7}{2x+1} = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Luego $-\dfrac{2+b}{3} = -\dfrac{5}{3} \Longrightarrow b = -7$

b) Asíntotas:

- Si $x \le 1$ si hay asíntotas verticales ($x = -2$ si está en la rama). Si hay horizontales $y = 2$ y, por tanto, no hay oblicuas.

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2x+b}{x+2} = 2$$

- Si $x > 1$ no hay asíntotas verticales, los valores que anulan el denominador ($x = 1$ y $x = -2$) no están en la rama. Si hay horizontales $y = 1$ y, por tanto, no hay oblicuas.

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^2-7x+6}{x^2+x-2} = 1$$

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 + 1$$

.

a) Determínese el área de la región acotada delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y por las rectas $x = -2$ y $x = 0$.

b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

a) $x^3 + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$ luego hay que separar dos áreas S_1 en el intervalo $[-2, -1]$ y S_2 en el intervalo $[-1, 0]$.

$$S_1 = \int_{-2}^{-1} (x^3 + 1)\, dx = \left. \frac{x^4}{4} + x \right]_{-2}^{-1} = -\frac{11}{4}$$

$$S_2 = \int_{-1}^{0} (x^3 + 1)\, dx = \left. \frac{x^4}{4} + x \right]_{-1}^{0} = \frac{3}{4}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{11}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{2}\ u^2$$

b) $b = f(2) = 9$, $f'(x) = 3x^2$, $m = f'(2) = 12$. La ecuación de la recta tangente es: $y - 9 = 12(x - 2)$

Problema 4 *(2 puntos)* En cierto ensayo clínico, se trata al 60 % de pacientes afectados de hepatitis C con interferón, y al 40 % restante con ribavirina más interferón. Al cabo de ocho semanas se observa una respuesta favorable al tratamiento en el 43 % de los pacientes tratados únicamente con interferón y en el 71 % de los pacientes tratados con ribavirina más interferón. Se toma al azar un paciente del ensayo. Determínese la probabilidad de que:

a) Haya respondido favorablemente al tratamiento que está recibiendo.

b) Si ha respondido favorablemente al tratamiento, haya sido tratado únicamente con interferón.

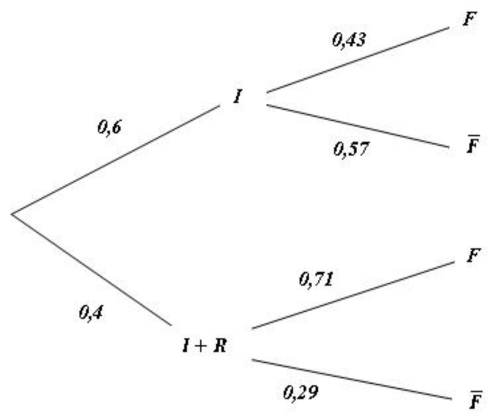
Solución: $P(I) = 0,6, \quad P(I + R) = 0,4$

a)

$$P(F) = 0,6 \cdot 0,43 + 0,4 \cdot 0,71 = 0,542$$

b)

$$P(I|F) = \frac{P(F|I)}{P(F)} = \frac{0,6 \cdot 0,43}{0,542} = 0,476$$



Problema 5 *(2 puntos)* El tiempo, en minutos, que los empleados de unos grandes almacenes tardan en llegar a su casa se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 5$.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 64 empleados y su media muestral es $\overline{X} = 30$ minutos. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 99 % tenga una amplitud a lo sumo de 10 minutos?

Solución:

a) $n = 64$, $\overline{X} = 30$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$IC = \left(\overline{X} - E, \overline{X} + E\right) = (28,775; 31,225)$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{5}{\sqrt{64}} = 1,225$$

b) $z_{\alpha/2} = 2,575$ y $E = 5$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575\frac{5}{\sqrt{n}} = 5 \Longrightarrow n \geq 6,63$$

$$n = 7$$