Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Marzo 2017

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$$

a) Hállense sus asíntotas horizontales y oblicuas, si es que existen.

b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: No hay, el denominador no se anula nunca.
- Horizontales: No hay, $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1} = \infty$
- Oblícuas: $y = mx + n \Longrightarrow y = x$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3}{x^3+x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right) = 0$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$, pero en este punto no hay un extremo dado que $f'(x) > 0$ en el dominio de la función y, por tanto, es creciente en R y no tiene extremos.

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2-2x-1}{x-1} & \text{si} \quad x < 1 \\ (x-1)^3 + a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

a) Determínese el valor de la constante a para que sea una función continua en todo su dominio.

b) Para $a = 0$, calcúlese el valor de la integral $\int_1^5 f(x)\,dx$.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{3x^2-2x-1}{x-1} = 4$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} (x-1)^3 + a = a$$

Luego $a = 4$

b) con $a = 0$

$$\int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^5 (x-1)^3\,dx = \left.\frac{(x-1)^4}{4}\right]_1^5 = 64$$

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} x+a & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2-2 & \text{si} \quad 1 \le x \le 3 \\ x+b & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

a) Determínense a y b para que f sea continua en todo R.

b) Calcúlese $\int_1^3 f(x)\,dx$.

Solución:

a) Para que f sea continua en $x = 1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (x+a) = 1+a$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} (x^2-2) = -1$$

$$1 + a = -1 \Longrightarrow a = -2$$

Para que f sea continua en $x = 3$:

$$\lim_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 3^-} (x^2-2) = 7$$

$$\lim_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 3^+} (x+b) = 3+b$$

$$7 = 3 + b \Longrightarrow b = 4$$

b)

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 \left(x^2-2\right)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - 2x\right]_1^3 = \frac{14}{3}$$

Problema 4 *(2 puntos)* Sean las funciones reales de variable real

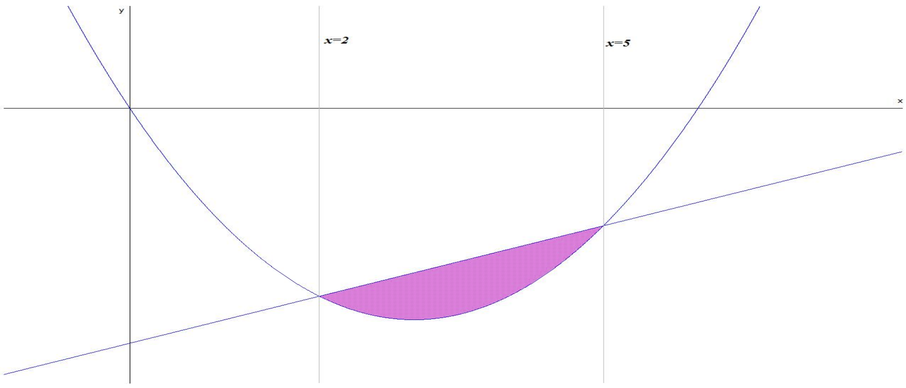
$$f(x) = x^2 - 6x, \quad g(x) = x - 10$$

a) Represéntense gráficamente las funciones f y g.

b) Calcúlese el área del recinto plano acotado por las gráficas de las funciones f y g.

Solución:

a) Gráfica:



b) $x^2 - 6x = x - 10 \Longrightarrow x = 2$ y $x = 5$.

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\,dx = \int (x^2 - 7x + 10)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 10x$$

$$S_1 = \int_2^5 (f(x) - g(x))\,dx = F(5) - F(2) = -\frac{9}{2}$$

$$S = |S_1| = \left|-\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2}\ u^2$$

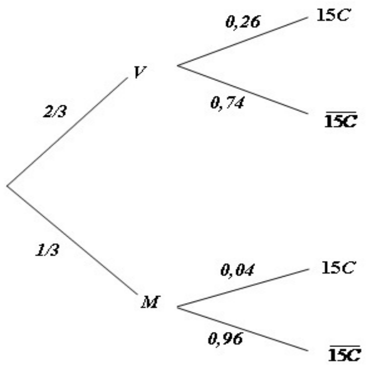
Problema 5 *(2 puntos)* Se ha cometido un delito. La probabilidad de que lo haya cometido un varón es el doble de que lo haya cometido una mujer. Por otra parte, la probabilidad de que al examinar un área determinada de la huella dactilar de un varón se encuentren 15 crestas es 0,26, mientras que en una mujer es 0,04.

a) Calcúlese la probabilidad de que una huella encontrada en la escena del delito tenga 15 crestas en el recuento de dicha área.

b) Se ha encontrado en la escena del delito una huella dactilar con 15 crestas en esa área determinada. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha huella pertenezca a un varón?

Solución:

$$P(M) = \frac{1}{3},\ \ P(V) = \frac{2}{3},\ \ P(15C|V) = 0,26,\ \ P(15C|M) = 0,04$$



a)

$$P(15C) = P(15C|V)P(V) + P(15C|M)P(M) =$$
$$= 0,26 \cdot \frac{2}{3} + 0,04 \cdot \frac{1}{3} = 0,187$$

b)

$$P(V|15C) = \frac{P(15C|V)P(V)}{P(15C)} = \frac{0,26 \cdot \frac{2}{3}}{0,187} = 0,927$$