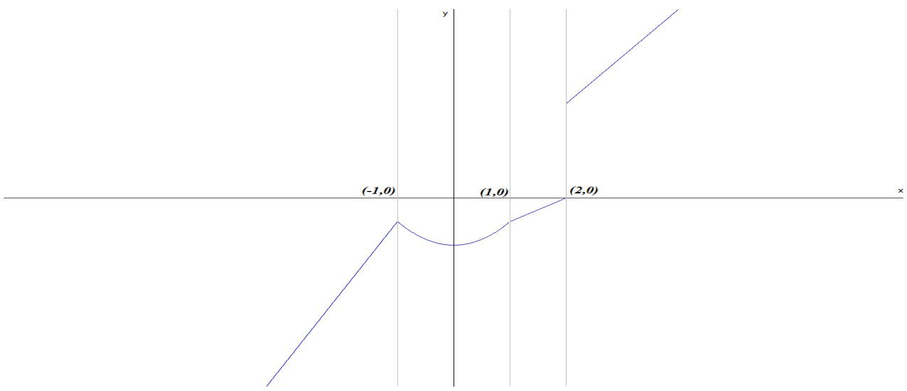
Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Febrero 2016

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2-2 & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ 3 & \text{si} \quad x = 1 \\ x-2 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 2x & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 2$. Representarla gráficamente.
Solución:



En $x = -1$ es continua , en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 2$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3ax^2 - 2bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ bx^2 - 2ax + 3 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (3ax^2 - 2bx + 1) = 3a - 2b + 1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} (bx^2 - 2ax + 3) = b - 2a + 3$$

$$3a - 2b + 1 = b - 2a + 3 \Longrightarrow 5a - 3b = 2$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 6ax - 2b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2bx - 2a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 6a - 2b; \;\; f'(1^+) = 2b - 2a \Longrightarrow 6a - 2b = 2b - 2a \Longrightarrow 2a - b = 0$$

$$\begin{cases} 5a - 3b = 2 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \end{cases}$$

Problema 3 Calcular a y b para que la función siguiente sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2ax-3b}{2} & \text{si} & x < -1 \\ bx - 2 & \text{si} & -1 \leq x < 1 \\ \frac{3ax-4b}{2} & \text{si} & x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^-} \dfrac{2ax-3b}{2} = \dfrac{-2a-3b}{2} \\ \lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^+} (bx - 2) = -b - 2 \end{cases} \Longrightarrow \frac{-2a-3b}{2} = -b-2 \Longrightarrow 2a+b = 4$$

Continuidad en $x = 1$:

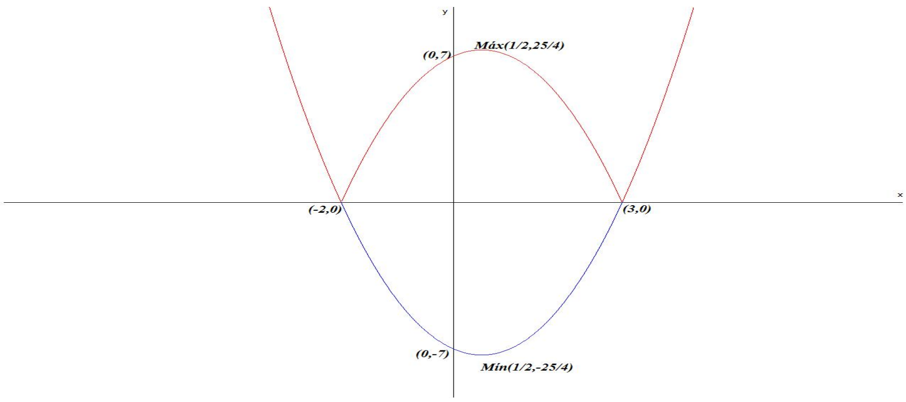
$$\begin{cases} \lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (bx - 2) = b - 2 \\ \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} \dfrac{3ax-4b}{2} = \dfrac{3a-4b}{2} \end{cases} \Longrightarrow \frac{3a-4b}{2} = b-2 \Longrightarrow 3a-6b = -4$$

$$\begin{cases} 2a + b = 4 \\ 3a - 6b = -4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 4/3 \\ b = 4/3 \end{cases}$$

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - x - 6|$ y representarla gráficamente.

Solución:
Hacemos $g(x) = x^2 - x - 6 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1/2$:

x	y
0	-7
3	0
-2	0
$1/2$	$-25/4$



$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''(1/2) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6 & \text{si} \quad x \le -2 \\ -(x^2 - x - 6) & \text{si} \quad -2 < x \le 3 \\ x^2 - x - 6 & \text{si} \quad 3 \le x \end{cases}$$

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^-} (x^2 - x - 6) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -2^+} (-x^2 + x + 6) = 0$$

$$f(-2) = 0$$

Y f es continua en $x = 3$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3^-} (-x^2 + x + 6) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3^+} (x^2 - x - 6) = 0$$

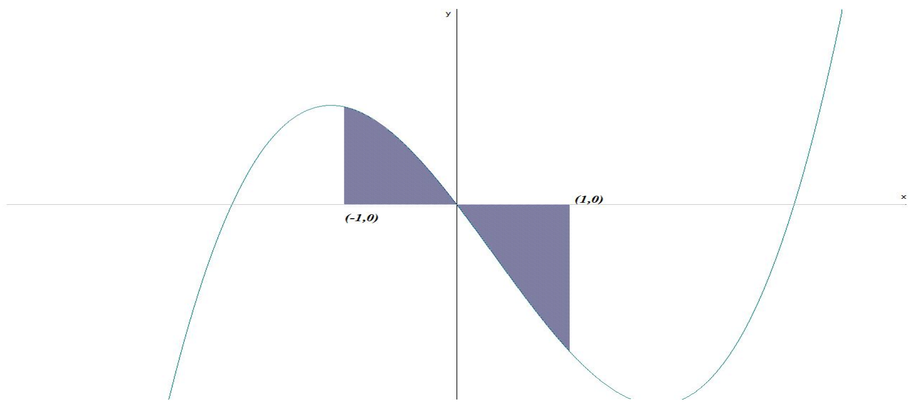
$$f(3) = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si} \quad x \le -2 \\ -2x + 1 & \text{si} \quad -2 < x \le 3 \\ 2x - 1 & \text{si} \quad 3 \le x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = -2$: $f'(-2^-) = -5$ y $f'(-2^+) = 5$, luego no es derivable en $x = -2$.
Derivabilidad en $x = 3$: $f'(3^-) = -5$ y $f'(3^+) = 5$, luego no es derivable en $x = 3$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{-2, 3\}$.

Problema 5 Dada la función $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$, encontrar el área encerrada por ella, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.
Solución:



$$x^3 - x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = -1 \text{ y } x = 1$$

Tendremos dos áreas a calcular S_1 con los límites de integración entre -1 y 0, y otra S_2 entre 0 y 1.

$$F(x) = \int (x^3 - x^2 - 6x)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 3x^2$$

$$S_1 = \int_{-1}^{2} f(x)\, dx = F(0) - F(-1) = \frac{29}{12}, \;\; S_2 = \int_0^1 f(x)\, dx = F(1) - F(0) = -\frac{37}{12}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{29}{12} + \frac{37}{12} = \frac{11}{2} \; u^2$$