

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)

Febrero 2015

Problema 1 Dada la función

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

Se pide:

- Calcular su dominio.
- Calcular sus puntos de corte con los ejes coordenados.
- Calcular su signo.
- Calcular su simetría.
- Calcular sus asíntotas.
- Calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, calculando sus extremos relativos.
- Calcular sus intervalos de concavidad y convexidad, calculando sus puntos de inflexión.
- Representación gráfica.
- Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abscisa $x = -1$.

Solución:

- Dominio de f : $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
- Puntos de Corte
 - Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \implies x^2 - x + 1 = 0 \implies$
No hay puntos de corte con OX .
 - Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \implies f(0) = -1 \implies (0, -1)$.
-

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
signo	-	+

- $f(-x) \neq \pm f(x) \implies$ la función no tiene simetrías.
- Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} - x \right) = 0$$

Luego la asíntota oblicua es $y = x$

f)

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = 0 \implies x = 0, x = 2$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(0, 1) \cup (1, 2)$.

La función tiene un máximo en el punto $(0, -1)$ y un mínimo en $(2, 3)$.

g)

$$f''(x) = \frac{2}{(x - 1)^3} \neq 0$$

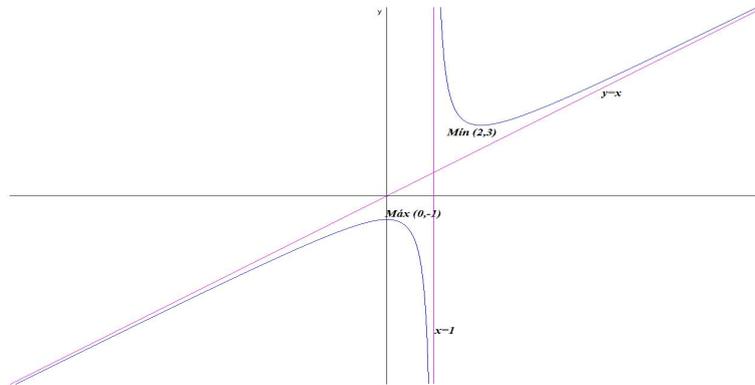
Luego la función no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	-	+
$f(x)$	convexa	cóncava

Cóncava: $(1, +\infty)$

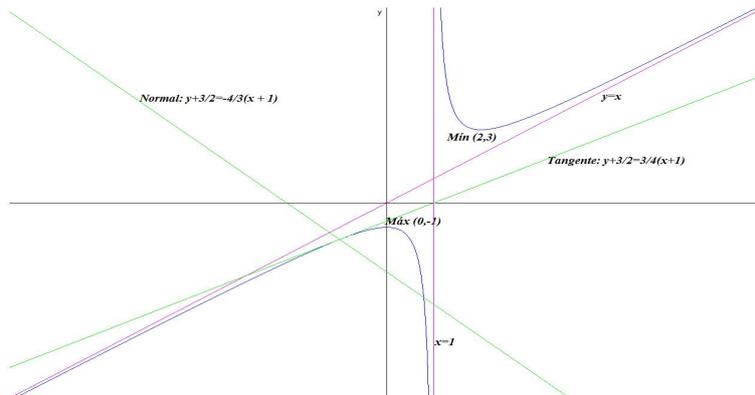
Convexa: $(-\infty, 1)$

h) Representación:



i) Calcular las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$:

Como $m = f'(-1) = -5/4$ tenemos que



$$\text{Recta Tangente : } y + \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}(x + 1)$$

$$\text{Recta Normal : } y + \frac{3}{2} = \frac{4}{3}(x + 1)$$

Como $f(-1) = -3/2$ las rectas pasan por el punto $(-1, -3/2)$.