Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2016

Problema 1 *(4 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente de $a \in R$:

$$\begin{cases} 3x + y + az = a - 2 \\ ax - y + z = a - 2 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

1. Discútase el sistema para los diferentes valores del a.

2. Resuélvase para $a = 0$.

(Junio 2016 - Opción A (Coincidentes))
Solución:

1. $$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & a & a-2 \\ a & -1 & 1 & a-2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right); \quad |A| = 2a^2 - 8 = 0 \Longrightarrow a = \pm 2$$

   - Si $a \neq \pm 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
   - Si $a = -2$:

     $$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right); \quad |A| = 0 \text{ y } \left| \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{array} \right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow$$

     $$\text{Rango}(A) = 2$$

     $$|A_2| = \left| \begin{array}{ccc} 3 & 1 & -4 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{array} \right| = 32 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

     como $\text{Rango}(\overline{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.
   - Si $a = 2$:

     $$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right); \quad |A| = 0 \text{ y } \left| \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

     como $F_3 = F_1 - F_2 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2 = \text{Rango}(A) <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

2. Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + y = -2 \\ -y + z = -2 \\ x + 2y + z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo a un número real.

1. Determínese a para que la matriz A admita inversa.

2. Para $a = 1$, determínese la matriz X que verifica $A \cdot X + A = Id$.

(Junio 2016 - Opción B (Coincidentes))

Solución:

1. $|A| = a(2 - a) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 2$
   Si $= 0$ o $a = 2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.
   Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

2. $A \cdot X + A = I \Longrightarrow A \cdot X = I - A \Longrightarrow X = A^{-1}(I - A)$:
   Para $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(3 puntos)* Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calcúlese A^{15} e indíquese si la matriz A tiene inversa.

2. Calcúlese el determinante de la matriz $(B \cdot A^t \cdot B^{-1} - 2 \cdot Id)^3$.

Nota: A^t denota la matriz traspuesta de A. Id es la matriz identidad de orden 2.
(Septiembre 2015 - Opción A)
Solución:

1. $A^2 = A \Longrightarrow A^{15} = A$ y $|A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.

2. $$B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C = B \cdot A^t \cdot B^{-1} - 2 \cdot I =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|C| = 2 \Longrightarrow |C^3| = |C|^3 = 8$$