Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Octubre 2016

Problema 1 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0, \ |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0, \ |A_4| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Problema 2 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & -2 & 1 \\ 2 & m & m+2 \\ m & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 2$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} m & -2 & 1 \\ 2 & m & m+2 \\ m & -7 & 0 \end{vmatrix} = 2(2m^2 + 5m - 7) = 0 \Longrightarrow m = 1, \ \ m = -7/2$$

Si $m = 1$ o $m = -7/2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

Si $m \neq 1$ y $m \neq -7/2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ existe A^{-1}.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & -7 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 14/11 & -7/22 & -5/11 \\ 4/11 & -1/11 & -3/11 \\ -9/11 & 5/11 & 4/11 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular A^n y en particular A^{1000}

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{1000} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1000 \\ 0 & 1 & 1000 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 4 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

LLamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -a+2c & -b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 2a+b \\ -c & 2c+d \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -a+2c = -a \Longrightarrow c = 0 \\ -b+2d = 2a+b \Longrightarrow a = d-b \\ c = -c \Longrightarrow c = 0 \\ d = 2c+d \Longrightarrow c = 0 \end{array} \right.$$

Luego $X = \begin{pmatrix} d-b & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$.