Examen de Matemáticas II-Coincidente (Junio 2017) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x-4}$, definidas para $x\in(-2,4)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar el valor o valores de x para los que $f'(x)=g'(x)$.

b) (1 punto) Hallar el punto x del intervalo $(-2,4)$ en el que la diferencia $f(x)-g(x)$ es mínima y determinar el valor de esta diferencia mínima.

c) (0,5 puntos) Hallar $\lim\limits_{x\longrightarrow -2^+}(f(x)-g(x))$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow 4^-}(f(x)-g(x))$.

d) (1 punto) Hallar $F(x)$, primitiva de la función $f(x)-g(x)$, que cumple la condición $F(2)=2+\ln 2$.

Solución:

a) $f'(x)=-\dfrac{1}{(x+2)^2}$ y $g'(x)=-\dfrac{1}{(x-4)^2}\Longrightarrow -\dfrac{1}{(x+2)^2}=-\dfrac{1}{(x-4)^2}\Longrightarrow$

$$(x-4)^2=(x+2)^2\Longrightarrow 12x-12=0\Longrightarrow x=1$$

b) $h(x)=f(x)-g(x)=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-4}\Longrightarrow$

$$h'(x)=-\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x-4)^2}\Longrightarrow 12x-12=0\Longrightarrow x=1$$

	$(-2,1)$	$(1,4)$
$h'(x)$	$-$	$+$
$h(x)$	decreciente	creciente

Como la función decrece en el intervalo $(-2,1)$ y crece en el $(1,4)$, en $x=1$ habrá un mínimo. La diferencia mínima es $h(1)=f(1)-g(1)=\frac{2}{3}$.

c) $\lim\limits_{x\longrightarrow -2^+}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\longrightarrow -2^+}\dfrac{-6}{(x+2)(x-4)}=\left[\dfrac{-6}{0^-}\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\longrightarrow 4^-}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\longrightarrow 4^-}\dfrac{-6}{(x+2)(x-4)}=\left[\dfrac{-6}{0^-}\right]=+\infty$

d) $F(x)=\displaystyle\int\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-4}\right)dx=\ln|x+2|-\ln|x-4|+C$

$F(2)=\ln 4-\ln 2+C=2\ln 2-\ln 2+C=\ln 2+C=2+\ln 2\Longrightarrow C=2$

Luego $F(x)=\ln\left|\dfrac{x+2}{x-4}\right|+2$

Problema 2 *(3 puntos)* Dada la recta $r \equiv x - 1 = y = z$, se pide:

a) (1 punto) Calcular la ecuación de una recta r', con dirección perpendicular a r, que esté contenida en el plano OXY y pase por el punto $(1, 2, 0)$.

b) (1 punto) Hallar un plano perpendicular a OXY, que contenga a la recta r.

c) (1 punto) Calcular la distancia del origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ a la recta r.

Solución:

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{array} \right.$$

a) El plano $\pi(OXY) : z = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = (0, 0, 1)$. Si $r' \in \pi \Longrightarrow \overrightarrow{u_{r'}} = (a, b, 0)$ y como $\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_{r'}} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_{r'}} = 0 \Longrightarrow a + b = 0 \Longrightarrow b = -a \Longrightarrow \overrightarrow{u_{r'}} = (a, -a, 0) = a(1, -1, 0)$, luego podemos coger $\overrightarrow{u_{r'}} = (1, -1, 0) \Longrightarrow r' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r'}} = (1, -1, 0) \\ P_{r'}(1, 2, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow r' : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 0 \end{array} \right.$

b)

$$\pi' : \left| \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (0, 0, 1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi' : \left| \begin{array}{ccc} x-1 & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi' : x - y - 1 = 0$$

c) $|\overrightarrow{OP_r} \times \overrightarrow{u_r}| = | \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| | = |(0, -1, 1)| = \sqrt{2}\ u$

$$d(O, r) = \frac{|\overrightarrow{OP_r} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}\ u$$

Problema 3 *(2 puntos)* En un supermercado tienen tres artículos con ofertas por la compra de una segunda unidad. La segunda unidad del artículo A tiene un descuento del 60 %, la segunda unidad del artículo B tiene un descuento del 75 %, mientras que la segunda unidad del artículo C se oferta con un descuento del 50 %. Si un cliente compra un artículo de cada clase y, por lo tanto, no se beneficia de descuento alguno, debe pagar 26 euros. Si compra dos artículos de cada clase pagará 35,20 euros. Finalmente, si no adquiere el artículo A, pagará lo mismo comprando dos unidades de B y una de C que si compra dos unidades de C y una de B. Determínese el precio de cada artículo.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=26 \\ 1,4x+1,25y+1,5z=35,20 \\ 1,25y+z=1,5z+y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=26 \\ 28x+25y+30z=704 \\ y-2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=8 \\ y=12 \\ z=6 \end{array}\right.$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dada la matriz $\left(\begin{array}{rrr} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{array}\right)$, se pide:

a) (1 punto) Calcular su inversa.

b) (1 punto) Calcular la matriz B para que $X = \left(\begin{array}{r} -4 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right)$ sea solución del sistema $A^2X = B$.

Solución:

a) $A = \left(\begin{array}{rrr} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{rrr} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right)$

b) $B = A^2X = \left(\begin{array}{rrr} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{array}\right)^2 \cdot \left(\begin{array}{r} -4 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{r} -17 \\ -22 \\ -53 \end{array}\right)$

Examen de Matemáticas II-Coincidente (Junio 2017) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & my+ & 3z= & 4 \\ x+ & y- & 2z= & -2 \\ 3x & + & (m+1)z= & m+2 \end{array}\right.,$$

, se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro real m.

b) (0,5 puntos) Resolverlo para $m=-3$.

c) (0,5 puntos) Para cierto valor de m, que hace que el sistema sea compatible, se ha obtenido una solución con $y = 0$. Determinar x y z para esa solución. ¿Cuál es el valor de m?

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & m+1 & m+2 \end{array} \right) \quad |A| = -(m^2+6m+8) = 0 \Longrightarrow m = -2, \quad m = -4$$

Si $m \neq -2$ y $m \neq -4 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $m = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right); F_3 = F_1 + 2F_2 \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

Si $m = -4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & -3 & -2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & -6 \\ 0 & 12 & -12 & -14 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 - 12F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $m = -3$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 3y + 3z = 4 \\ x + y - 2z = -2 \\ 3x - 2z = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{array} \right.$$

c) Si $y = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3z = 4 \\ x - 2z = -2 \\ 3x + (m+1)z = m+2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2/5 \\ y = 0 \\ z = 6/5 \end{array} \right. \Longrightarrow m = -2$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dado el punto $P(5, 7, 10)$ y el plano de ecuación $\pi \equiv x + 2y + 3z = 7$; se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto P', simétrico de P respecto de π.

b) (1 punto) Hallar la posición relativa del plano π y la recta que pasa por el punto $Q(1, 1, 1)$ y tiene dirección $\overrightarrow{v} = (-10, 2, 2)$.

c) (1 punto) Calcular el área del triángulo que tiene por vértices a los puntos P, Q y al origen de coordenadas $O(0,0,0)$.

Solución:

a) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calcular $r \perp \pi / P \in r \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,2,3) \\ P_r = P(5,7,10) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 5 + \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 10 + 3\lambda \end{array} \right.$
- Calcular P' punto de corte de r con π:

  $(5+\lambda) + 2(7+2\lambda) + 3(10+3\lambda) = 7 \Longrightarrow \lambda = -3 \Longrightarrow P'(2,1,1)$
- $\dfrac{P+P''}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P = 2(2,1,1) - (5,7,10) = (-1,-5-8)$

b) $s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{v} = (-10,2,2) = 2(-5,1,1) \\ P_s = Q(1,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 5\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right.$.

Cañculamos el posible punto de corte entre s y π:

$(1-5\lambda) + 2(1+\lambda) + 3(1+\lambda) = 7 \Longrightarrow !‘6 = 7! \Longrightarrow s$ y π son paralelos.

c) $S_T = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}| = \dfrac{1}{2}| \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 5 & 7 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| | = \dfrac{1}{2}|(-3,5,-2)| = \dfrac{\sqrt{38}}{2}\ u^2$

Problema 3 *(2 puntos)*

a) (1 punto) Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{4\sin^2 x - 5\sin x \cos x}{3\sin^2 x \cos x + 2\sin x}; \quad \lim_{x \longrightarrow \infty} (\sqrt{x} - \sqrt{2x+7}).$$

b) (1 punto) Calcule las siguientes integrales:

$$\int (3u+1)\cos(2u)\, du; \quad \int_2^5 \frac{7}{4x+1}\, dx.$$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{4\sin^2 x-5\sin x\cos x}{3\sin^2 x\cos x+2\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x(4\sin x-5\cos x)}{\sin x(3\sin x\cos x+2)}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{4\sin x-5\cos x}{3\sin x\cos x+2}=-\frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{2x+7})=[\infty-\infty]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2x+7})(\sqrt{x}+\sqrt{2x+7})}{(\sqrt{x}+\sqrt{2x+7})}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-x-7}{(\sqrt{x}+\sqrt{2x+7})}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-x}{(\sqrt{x}+\sqrt{2}\sqrt{x})}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-\sqrt{x}}{1+\sqrt{2}}=-\infty$$

b)

$$\int(3u+1)\cos(2u)\,du=\left[\begin{array}{c} w=3u+1\Longrightarrow dw=3du\\ dv=\cos 2u\,du\Longrightarrow v=\frac{1}{2}\sin u\end{array}\right]=$$

$$\frac{(3u+1)\sin 2u}{2}-\frac{3}{2}\int\sin 2u\,du=$$

$$\frac{(3u+1)\sin 2u}{2}+\frac{3\cos 2u}{4}+C=\frac{2(3u+1)\sin 2u+3\cos 2u}{4}+C$$

$$\int_2^5\frac{7}{4x+1}\,dx.=\frac{7}{4}\ln|4x+1|\bigg]_2^5=\frac{7}{4}\ln\frac{7}{3}$$

Problema 4 *(2 puntos)* En una empresa el 20 % de los empleados son matemáticos, el 50 % ingenieros y el resto no tienen carrera universitaria. Entre los matemáticos el 40 % ocupa un cargo directivo, entre los ingenieros ese porcentaje se reduce a la mitad y entre el resto de empleados el porcentaje es del 5 %. Elegido un empleado al azar, se pide:

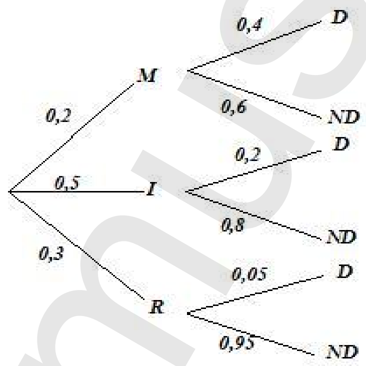
a) (1 punto) Determinar la probabilidad de que ocupe un cargo directivo.

b) (1 punto) Si no ocupa un cargo directivo, ¿cuál es la probabilidad de que sea matemático?

Solución:

a) $P(D)=P(M)P(D|M)+P(I)P(D|I)+P(R)P(D|R)=0,4\cdot 0,2+0,2\cdot 0,5+0,05\cdot 0,3=0,195$

b) $P(M|\overline{D})=\dfrac{P(\overline{D}|M)P(M)}{P(\overline{D})}=\dfrac{0,6\cdot 0,2}{1-0,195}=0,149$


0,4
D
M
0,2
0,6
ND
0,2
D
0,5
I
0,8
ND
0,3
0,05
D
R
0,95
ND