Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Mayo-Final 2017

Problema 1 *(2 puntos)*Sea $f: R \longrightarrow R$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

a) Halla a, b y c para que la gráfica de f tenga un punto de inflexión de abcisa $x = 2$ y que la recta tangente en el punto de abcisa $x = 1$ tenga por ecuación $y - 4 = -2(x - 1)$.

b) Para $a = -7$, $b = 8$ y $c = 2$, calcula los extremos relativos de f (abcisas donde se obtienen y valores que alcanzan)

Solución:

a) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, $f''(x) = 6x + 2a$
La pendiente de la recta $m = f'(1) = -2$ y como el punto de tangencia es común a la gráfica de f y a la recta tangente $f(1) = 4$:

$$\left\{\begin{array}{l} f''(2) = 0 \Longrightarrow 12 + 2a = 0 \Longrightarrow a = -6 \\ f'(1) = -2 \Longrightarrow 3 + 2a + b = -2 \Longrightarrow b = 7 \\ f(1) = 4 \Longrightarrow 1 + a + b + c = 4 \Longrightarrow c = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow P(x) = x^3 - 6x^2 + 7x + 2$$

b)

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 2, \ \ f'(x) = 3x^2 - 14x + 8 = 0 \Longrightarrow x = 4, \ \ x = 2/3$$

	$(-\infty, 2/3)$	$(2/3, 4)$	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función f es creciente en $(-\infty, 2/3) \cup (4, \infty)$ y decreciente en $(2/3, 4)$. Presenta un máximo relativo en el punto $(2/3, 122/27)$ y un mínimo relativo en el punto $(4, -14)$.

Problema 2 *(2 puntos)*Dada la función:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} 1 + a & \text{si} & x < 0 \\ 1 + xe^x & \text{si} & x \geq 0 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$ y estudiar, en este caso, la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) Calcular, en función de a la integral $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} (1+a) = 1+a$$

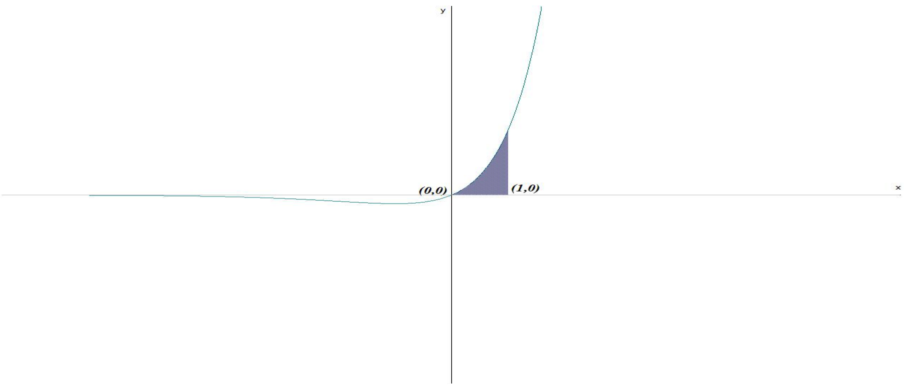
$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} (1+xe^x) = 1$$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 0$ cuando $a = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ e^x - xe^x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = 0$: $f'(0^-) = 0 \neq f'(0^+) = 1$ luego no es derivable en $x = 0$.
En resumen, para $a = 1$ la función es continua en R y derivable en $R - \{0\}$.

b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (1+xe^x)\,dx = e^x(x-1)]_0^1 = 1$



Problema 3 *(2 puntos)*Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x^2+1}$, se pide:

a) Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$.

b) Estudiar sus asíntotas y su crecimiento y decrecimiento (máximos y mínimos).

c) Estudiar su curvatura.

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{8x}{(x^2+1)^2}$

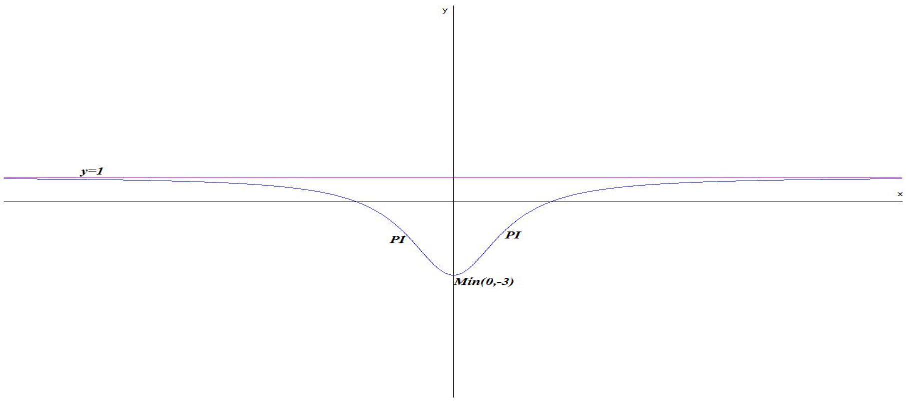
$$b = f(1) = -1, \;\; m = f'(1) = 2, \;\; y + 1 = 2(x-1)$$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x^2+1}$

- $\text{Dom}(f) = R$, es una función par, con corte con OY en $(0,-3)$ y con OX en $(0,\sqrt{3})$ y $(0,-\sqrt{3})$.
- Asíntotas: No tiene verticales, tiene una horizontal en $y = 1$ ya que $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^2-3}{x^2+1} = 1$ y por tanto no hay oblicuas.
- Monotonía: $f'(x) = \dfrac{8x}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$

	$(-\infty,0)$	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty,0)$.



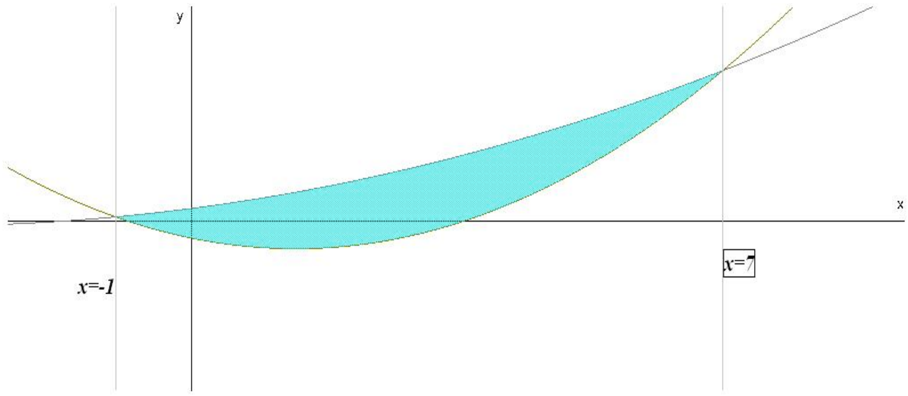
La función es creciente en el intervalo $(0,\infty)$.
La función tiene un mínimo en el punto $(0,-3)$.

- $f''(x) = -\dfrac{8(3x^2-1)}{(x^2+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

	$(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	convexa	cóncava	convexa

Convexa: $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty\right)$
Cóncava: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Problema 4 *(2 puntos)*Calcular el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = 4x^2 - 11x - 12$ y $g(x) = x^2 + 7x + 9$.
Solución:



$$f(x) = g(x) \Longrightarrow 4x^2 - 11x - 12 = x^2 + 7x + 9x \Longrightarrow x = -1, \;\; x = 7$$

Tendremos que calcular S_1 con los límites de integración entre -1 y 7.

$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int (3x^2 - 18x - 21)\, dx = x^3 - 9x^2 - 21x$$

$$S_1 = \int_{-1}^{7} (f(x) - g(x))\, dx = F(7) - F(-1) = -256$$

$$S = |S_1| = 256 \; u^2$$

Problema 5 *(2 puntos)* Calcular justificadamente:

a) $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{1 - 2x - e^x + \sin(3x)}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{(5x^2 + 2)(x - 6)}{(x^2 - 1)(2x - 1)}$

Solución:

a)

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 - 2x - e^x + \sin(3x)}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-2 - e^x + 3\cos(3x)}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-e^x - 9\sin(3x)}{2} = -\frac{1}{2}$$

b)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(5x^2 + 2)(x - 6)}{(x^2 - 1)(2x - 1)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{5x^3}{2x^3} = \frac{5}{2}$$