Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Abril 2017

Problema 1 *(2 puntos)* Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x<0 \\ xe^x+1 & \text{si} \quad x\ge 0\end{cases}$$

Se pide:

a) (0,5 puntos). Estudiar la continuidad de f.

b) (0,5 puntos). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{\cos x}{1}=1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 0^+}(xe^x+1)=1, \text{ y } f(0)=1$$

La función es continua en $x=0$ y, por tanto, en R.

b)

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2} & \text{si} \quad x<0 \\ e^x+xe^x & \text{si} \quad x\ge 0\end{cases}$$

$$f'(0^-)=\lim_{h\longrightarrow 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\longrightarrow 0^-}\frac{\frac{\sin h}{h}-1}{h}=$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0^-}\frac{\sin h-h}{h^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{h\longrightarrow 0^-}\frac{\cos h-1}{2h}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{h\longrightarrow 0^-}\frac{-\sin h}{2}=0$$

$$f'(0^+)=1$$

$f'(0^-)\neq f'(0^+)\Longrightarrow$ la función no es derivable en $x=0\Longrightarrow$ la función es derivable en $R-\{0\}$

c) $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx=e^x(x-1)+x\big]_1^3=2e^3+2=42,17$

Problema 2 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Determinar los valores a, b, c para que la función $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x = 0 \\ ax - b & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ x^2 + bx + c & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$ sea continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$.

b) (1 punto). Aplicar, si es posible, el Teorema del Valor Medio a la función $g(x) = x^2 + x$ en el intervalo $[1, 2]$ y calcular, en tal caso, un punto de dicho intervalo en el que $g'(x)$ tome el valor predicho por el Teorema del Valor Medio.

Solución:

a) Continua en $x = 0$: $f(0) = -1$ y $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (ax - b) = -b \Longrightarrow b = 1$
Continua en $x = 1$: $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (ax - b) = a - b$ y $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} (x^2 + bx + c) = 1 + b + c \Longrightarrow a - b = 1 + b + c \Longrightarrow a - 2b - c = 1$
Luego $a - 2 - c = 1 \Longrightarrow a - c = 3$
Derivable en $x = 1$: $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ a & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ 2x + b & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$ $f'(1^-) = a$,
$f'(1^+) = 2 + b \Longrightarrow a - b = 2 \Longrightarrow a = 3 \Longrightarrow c = 0$

b) La función g es continua en el intervalo $[1, 2]$ y también derivable en $(1, 2)$. ($g(x) = x^2 + x$ y $g'(x) = 2x + 1$) Por el Teorema del Valor Medio
$\exists c \in (1, 2)/g'(c) = \dfrac{g(2) - g(1)}{2 - 1} = \dfrac{6 - 2}{1} = 4$
$g'(c) = 2c + 1 = 4 \Longrightarrow c = \dfrac{3}{2}$

Problema 3 *(2 puntos)*Dada la función $f(x) = \dfrac{-7x}{x^2 + 1}$, se pide:

a) (1 punto). Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 2$.

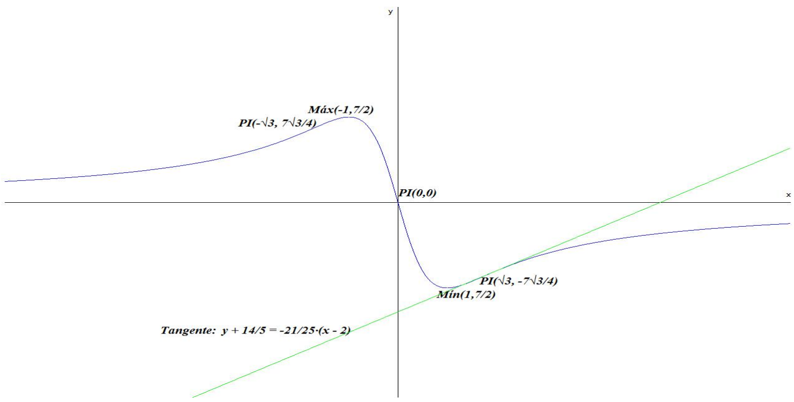
b) (1 punto). Estudiar sus asíntotas, su monotonía y su curvatura.

Solución:

a) $f'(x) = -\dfrac{7(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$

$$b = f(2) = -\frac{14}{5}, \quad m = f'(2) = \frac{21}{25}$$

$$y + \frac{14}{5} = \frac{21}{25}(x - 2)$$



b) Tenemos

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, es una función impar, con corte en $(0, 0)$, es positiva en $(-\infty, 0)$ y negativa en $(0, \infty)$.
- Asíntotas: No tiene verticales, tiene una horizontal en $y = 0$ ya que $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{-7x}{x^2+1} = 0$ y por tanto no hay oblicuas.
- Monotonía: $f'(x) = -\dfrac{7(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es decreciente en el intervalo $(-1, 1)$.
La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
La función tiene un máximo en el punto $(-1, 7/2)$ y un mínimo en $(1, -7/2)$.

- $f''(x) = -\dfrac{14x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0,\ \ x = \pm\sqrt{3}$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	cóncava	convexa	cóncava	convexa

Convexa: $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, Cóncava: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$ y con puntos de inflexión en los puntos $(0, 0)$, $(-\sqrt{3}, 7\sqrt{3}/4)$ y $(\sqrt{3}, -7\sqrt{3}/4)$.

Problema 4 *(2 puntos)*Dada la función $f(x) = x^3 + 3ax^2 - 2bx + c$, se pide:

a) (1,5 puntos). Hallar los valores de a, b y c para que la gráfica de la función tenga un extremo relativo en el punto de abcisa $x = 2$, un punto de inflexión en el de abcisa $x = 3$ y corte el eje OY en el punto de ordenada $y = -1$.

b) (0,5 puntos).¿Es el extremo relativo un máximo o un mínimo?

Solución:

a)

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 - 2bx + c, \quad f'(x) = 3x^2 + 6ax - 2b, \quad f''(x) = 6x + 6a$$

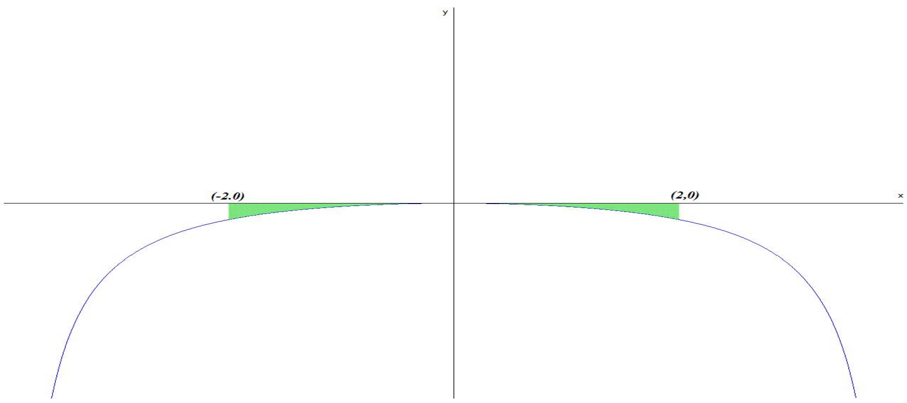
$$\begin{cases} f(0) = -1 \Longrightarrow c = -1 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12 + 12a - 2b = 0 \\ f''(3) = 0 \Longrightarrow 18 + 6a = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -12 \\ c = -1 \end{cases} \Longrightarrow f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$$

b)

$$f(x) = f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 1, \quad f'(x) = 3x^2 - 18x + 24, \quad f''(x) = 6x - 18$$

$$f''(2) = 6 < 0 \Longrightarrow \text{ en } x = 2 \text{ hay un máximo.}$$

Problema 5 *(2 puntos)*Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 16}$, encontrar el área encerrada por ella, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.
Solución:



$$\frac{x^2}{x^2 - 16} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Tendremos dos áreas a calcular S_1 con los límites de integración entre -2 y 0, y otra S_2 entre 0 y 2 (ambas son iguales, la función es impar).

$$F(x) = \int \frac{x^3}{x^2 - 9}\, dx = x + 2\ln\left|\frac{x - 4}{x + 4}\right|$$

$$S_1 = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-2) = 2 - 2\ln 3 = -0,197$$

$$S_2 = \int_{0}^{2} f(x)\,dx = F(2) - F(0) = 2 - 2\ln 3 = -0,197$$

$$S = |S_1| + |S_2| = -2 + 2\ln 3 - 2 + 2\ln 3 = 4\ln 3 - 4 = 0,394\ u^2$$