

**Examen de Matemáticas Aplicadas a las
CC. Sociales II (Junio 2016)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos**

Problema 1 (2 puntos) Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calcúlese el determinante de la matriz $A \cdot C \cdot C^T \cdot A^{-1}$.
- b) Calcúlese la matriz $M = A \cdot B$. ¿Existe M^{-1} ?
Nota: C^T denota la matriz traspuesta de la matriz C .

Solución:

a) $|A \cdot C \cdot C^T \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |C| \cdot |C^T| \cdot |A^{-1}| = |C|^2 = 4$
($|C| = |C^T|$ y $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$)

b)

$$M = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 11 \\ 37 & 26 \\ 33 & 21 \end{pmatrix}$$

No es una matriz cuadrada y, por tanto, $\nexists M^{-1}$.

Problema 2 (2 puntos) Sea S la región del plano definida por:

$$y + x \leq 5; \quad y - x \leq 3; \quad \frac{1}{2}x - y \leq -2$$

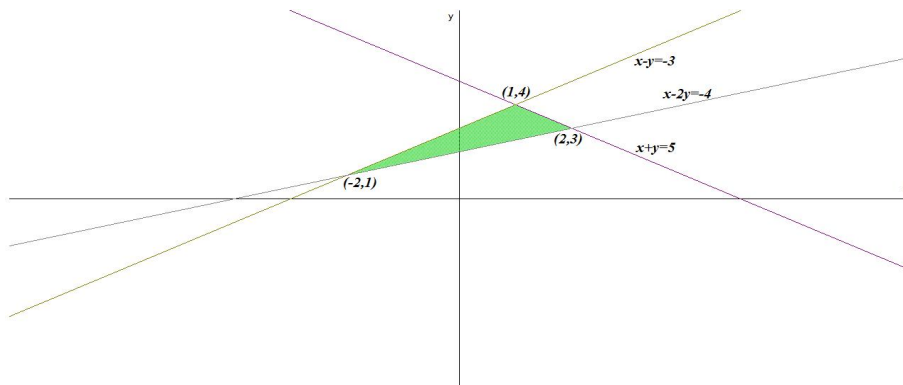
- a) Representétese la región S y calcúlese las coordenadas de sus vértices.
- b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

- a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x, y) = 2x + y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} x + y \leq 5 \\ x - y \geq -3 \\ x - 2y \leq -4 \end{cases}$$

La región S y los vértices a estudiar serán: $(-2, 1)$, $(1, 4)$, y $(2, 3)$:



b)

$$\begin{cases} z(-2, 1) = -3 \text{ M\u00ednimo} \\ z(1, 4) = 6 \\ z(2, 3) = 7 \text{ M\u00e1ximo} \end{cases}$$

El m\u00ednimo es -3 euros y se alcanza en el punto $(-2, 1)$ y el m\u00e1ximo es de 7 y se alcanza en el punto $(2, 3)$.

Problema 3 (2 puntos) Se considera la funci\u00f3n real de variable real:

$$f(x) = x^3 + 8$$

- a) Determin\u00e9se el \u00e1rea de la regi\u00f3n acotada delimitada por la gr\u00e1fica de $f(x)$, el eje de abscisas y por las rectas $x = -3$ y $x = -1$.
- b) Calc\u00falase la ecuaci\u00f3n de la recta tangente a la gr\u00e1fica de la funci\u00f3n $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Soluci\u00f3n:

- a) $x^3 + 8 = 0 \implies x = -2$ luego hay que separar dos \u00e1reas S_1 en el intervalo $[-3, -2]$ y S_2 en el intervalo $[-2, -1]$.

$$S_1 = \int_{-3}^{-2} (x^3 + 8) dx = \left[\frac{x^4}{4} + 8x \right]_{-3}^{-2} = -\frac{33}{4}$$

$$S_2 = \int_{-2}^{-1} (x^3 + 8) dx = \left[\frac{x^4}{4} + 8x \right]_{-2}^{-1} = \frac{17}{4}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{33}{4} + \frac{17}{4} = \frac{25}{2} u^2$$

- b) $b = f(1) = 9$, $f'(x) = 3x^2$, $m = f'(1) = 3$. La ecuaci\u00f3n de la recta tangente es: $y - 9 = 3(x - 1)$

Problema 4 (2 puntos) Una conocida orquesta sinfónica está compuesta por un 55 % de varones y un 45 % de mujeres. En la orquesta un 30 % de los instrumentos son de cuerda. Un 25 % de las mujeres de la orquesta interpreta un instrumento de cuerda. Calcúlese la probabilidad de que un intérprete de dicha orquesta elegido al azar:

- a) Sea una mujer si se sabe que es intérprete de un instrumento de cuerda.
- b) Sea intérprete de un instrumento de cuerda y sea varón.

Solución:

$$P(H) = 0,55, \quad P(M) = 0,45, \quad P(C) = 0,3, \quad P(C|M) = 0,25$$

a)

$$P(M|C) = \frac{P(C|M)P(M)}{P(C)} = \frac{0,25 \cdot 0,45}{0,30} = 0,375$$

b)

$$\begin{aligned} P(H \cap C) + P(M \cap C) &= P(C) \implies P(H \cap C) = P(C) - P(M \cap C) = \\ &P(C) - P(C|M)P(M) = 0,3 - 0,25 \cdot 0,45 = 0,1875 \end{aligned}$$

Problema 5 (2 puntos) La producción diaria de leche, medida en litros, de una granja familiar de ganado vacuno se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 50$ litros.

- a) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 10 litros.
- b) Se toman los datos de producción de 25 días escogidos al azar. Calcúlese la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas, \bar{X} , sea menor o igual a 940 litros si sabemos que $\mu = 950$ litros.

Solución:

a) $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $E = 5$

$$\begin{aligned} E &= z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \frac{50}{\sqrt{n}} = 5 \implies n > 384,16 \\ &n = 385 \end{aligned}$$

b) $n = 25, \mu = 950: \bar{X} \approx N\left(950; \frac{50}{\sqrt{25}}\right) = N(950; 10)$

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \leq 940) &= P\left(Z \leq \frac{940 - 950}{10}\right) = P(Z \leq -1) = \\ &1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587 \end{aligned}$$

**Examen de Matemáticas Aplicadas a las
CC. Sociales II (Junio 2016)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos**

Problema 1 (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + ay + 2z = 0 \end{cases}$$

- a) Discútase el sistema para los diferentes valores del $a \in \mathbb{R}$.
b) Resuélvase para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 0 \end{array} \right); \quad |A| = -2a + 4 = 0 \implies a = 2$$

- Si $a \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^{\circ}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right); \quad |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{como } |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A)$$

y el sistema es incompatible.

b) Si $a = 0$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 1/4 \\ z = -1/2 \end{cases}$$

Problema 2 (2 puntos) Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x+b}{x-2} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

- a) Determínese para qué valores del parámetro b la función $f(x)$ es continua en $x = -1$.
- b) Calcúlense las asíntotas de $f(x)$.

Solución:

- a) Continuidad en $x = -1$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x + b}{x - 2} = -\frac{1 + b}{3} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 4x + 3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x + 6}{2x + 4} = 2 \end{cases}$$

$$\text{Luego } -\frac{1 + b}{3} = 2 \implies b = -7$$

- b) Asíntotas:

- Si $x \leq -1$ no hay asíntotas verticales ($x = 2$ no está en la rama). Si hay horizontales $y = -1$ y, por tanto, no hay oblicuas.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + b}{x - 2} = -1$$

- Si $x > -1$ no hay asíntotas verticales, los valores que anulan el denominador ($x = -1$ y $x = -3$) no están en la rama. Si hay horizontales $y = 1$ y, por tanto, no hay oblicuas.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 4x + 3} = 1$$

Problema 3 (2 puntos) Sabiendo que la derivada de una función real de variable real es:

$$f'(x) = 6x^2 + 4x - 2$$

- a) Determínese la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 5$.
- b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f así como sus máximos y mínimos locales, si los tuviese.

Solución:

- a)

$$f(x) = \int (6x^2 + 4x - 2) dx = 2x^3 + 2x^2 - 2x + C$$

$$f(0) = 5 \implies C = 5 \implies f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x + 5$$

b) $6x^2 + 4x - 2 = 0 \implies x = -1$ y $x = 1/3$:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1/3)$	$(1/3, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1/3, \infty)$.

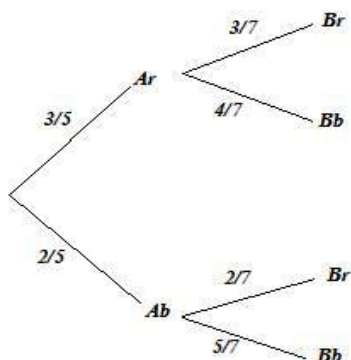
La función es decreciente en el intervalo $(-1, 1/3)$.

La función tiene un mínimo en $(1/3, 125/27)$ y un máximo en $(-1, 7)$.

Problema 4 (2 puntos) Tenemos dos urnas A y B . La urna A contiene 5 bolas: 3 rojas y 2 blancas. La urna B contiene 6 bolas: 2 rojas y 4 blancas. Se extrae una bola al azar de la urna A y se deposita en la urna B . Seguidamente se extrae una bola al azar de la urna B . Calcúlese la probabilidad de que:

- La segunda bola extraída sea roja.
- Las dos bolas extraídas sean blancas.

Solución:



a)

$$P(Br) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{13}{35} = 0,371$$

b)

$$P(Ab \cap Bb) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{7} = 0,286$$

Problema 5 (2 puntos) El peso por unidad, en gramos, de la gamba roja de Palamós, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 5$ gramos.

- a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 25 gambas y la media de sus pesos ha sido $\bar{X} = 70$ gramos. Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para μ .
- b) Si sabemos que $\mu = 70$ gramos, y se consideran los pesos de las 12 gambas de una caja como una muestra aleatoria simple, calcúlese la probabilidad de que el peso total de esas 12 gambas sea mayor o igual que 855 gramos.

Solución:

$$N(\mu; 650)$$

- a) $\sigma = 5$, $n = 25$, $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $\bar{X} = 70$:

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \frac{5}{\sqrt{25}} = 1,96$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (68,04; 71,96)$$

- b) $\mu = 70$, $n = 12 \implies 855/12 = 71,25$ la probabilidad pedida sería

$$P(\bar{X} \geq 71,25) = P\left(Z \geq \frac{71,25 - 70}{5/\sqrt{12}}\right) = P(Z \geq 0,87) = 1 - P(Z \leq 0,87) = 1 - 0,8023 = 0,1977$$