

**Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)**  
**Noviembre 2015**

---

**Problema 1** (2 puntos) Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real  $a$ :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 3z = 3 \\ 3x + ay - 2z = 5 \end{cases}$$

1. Discútase el sistema para los diferentes valores del  $a$ .
2. Resuélvase el sistema en el caso  $a = 2$ .

(Modelo 2016 - Opción A)

**Solución:**

1.

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & a & -2 & 5 \end{array} \right); \quad |A| = a - 3 = 0 \implies a = 3$$

- Si  $a \neq 3 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ$  de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si  $a = 3$ :

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -2 & 5 \end{array} \right); \quad |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

como  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 3 \implies$  el sistema es incompatible (no tiene solución).

2. Si  $a = 2$ :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 3z = 3 \\ 3x + 2y - 2z = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \\ z = -1 \end{cases}$$

**Problema 2** (2 puntos) Determinése la matriz  $X$  que verifica

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X$$

(Modelo 2016 - Opción A)

**Solución:**

$$\left[ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \right] \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \implies$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 16 \end{pmatrix}$$

**Problema 3** (2 puntos) Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Calcúlese  $A^{-1}$

2. Resuélvase el sistema de ecuaciones dado por  $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(Junio 2013 - Opción A)

**Solución:**

1.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.

$$AX = B \implies X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Problema 4** (3 puntos) Encontrar todas las matrices  $X$  cuadradas  $2 \times 2$  que satisfacen la igualdad

$$XA = AX$$

en cada uno de los casos siguientes:

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

2.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

(Junio 2006 - Opción B) **Solución:**

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{pmatrix} \implies \begin{cases} b = 3b \implies b = 0 \\ 3c = c \implies c = 0 \\ a = a \implies a \text{ cualquiera} \\ 3d = 3d \implies d \text{ cualquiera} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c & d \\ 3a & 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & a \\ 3d & c \end{pmatrix} \implies \begin{cases} c = 3b \\ d = a \implies c = 0 \\ 3a = 3d \implies a = d \\ 3b = c \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$$