

## Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)

Mayo 2016

---

---

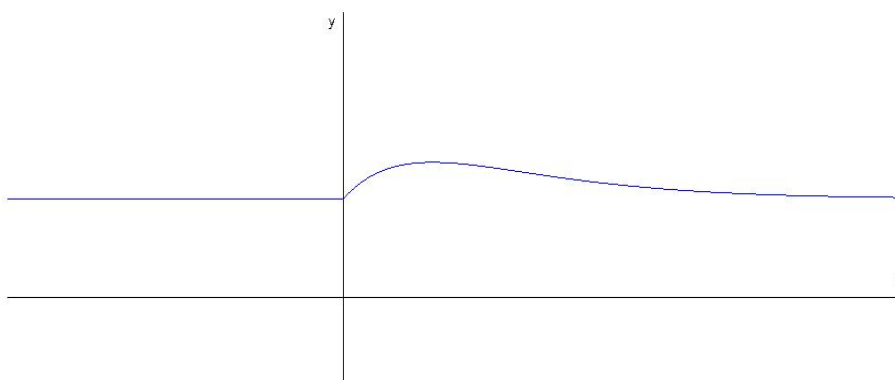
**Problema 1** Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 0 \\ 1 + xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Se pide:

- a) Determinar el valor de  $a$  para que  $f$  sea continua en  $x = 0$  y estudiar, en este caso, la derivabilidad de  $f$  en  $x = 0$ .
- b) Calcular, en función de  $a$  la integral  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ .

**Solución:**



- a) Continuidad en  $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} a = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + xe^{-x}) = 1$$

Luego  $f(x)$  es continua en  $x = 0$  cuando  $a = 1$ .

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} - xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Derivabilidad en  $x = 0$ :  $f'(0^-) = 0 \neq f'(0^+) = 1$  luego no es derivable en  $x = 0$ .

En resumen, para  $a = 1$  la función es continua en  $\mathbb{R}$  y derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

$$b) \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 a dx + \int_0^1 (1 + xe^{-x}) dx = ax]_{-1}^0 + x - e^{-x}(x+1)]_0^1 = a + 2(1 - e^{-1})$$

**Problema 2** Dada la función  $f(x) = e^{-x} - x$

- a) Determinar el polinomio de segundo grado,  $P(x) = ax^2 + bx + c$ , que verifica simultáneamente las tres condiciones siguientes:  $P(0) = f(0)$ ,  $P'(0) = f'(0)$ ,  $P''(0) = f''(0)$ .
- b) Usar los teoremas de Bolzano y Rolle para demostrar que la ecuación  $f(x) = 0$  tiene una única solución real.

**Solución:**

$$a) \begin{aligned} f(x) &= e^{-x} - x, & f'(x) &= -e^{-x} - 1, & f''(x) &= e^{-x} \\ P(x) &= ax^2 + bx + c & P'(x) &= 2ax + b, & P''(x) &= 2a \end{aligned}$$

$$\begin{cases} P(0) = f(0) = 1 \implies c = 1 \\ P'(0) = f'(0) = -2 \implies b = -2 \\ P''(0) = f''(0) = 1 \implies 2a = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1/2 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases} \implies P(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

- b)
  - La función es derivable en  $R$  y se cumple:  $f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0 \forall x \in R \implies$  la función es decreciente en  $R$ .
  - La función es continua en  $R$  y además:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} - x) = +\infty, \text{ y } \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x} - x) = -\infty$$

Por el teorema de Bolzano  $\exists c \in R / f(c) = 0$

- Por las conclusiones anteriores se concluye que ese punto  $c$  es único.

**Problema 3** Dada la función  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ , se pide:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

- b) Justificar que  $f$  está definida en todo  $x$  del intervalo  $[0, 1]$  y calcular  $\int_0^1 (x-2)f(x) dx$

**Solución:**

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

b)  $\text{Dom}(f) = (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$

$$\int_0^1 (x-2)f(x) dx = \int_0^1 (x-2)\sqrt{x^2 - 4x + 3} dx = \left. \frac{\sqrt{(x^2 - 4x + 3)^3}}{3} \right|_0^1 = -\sqrt{3}$$

**Problema 4** Calcular

a)  $\int_1^{3/2} \frac{dx}{1-4x^2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

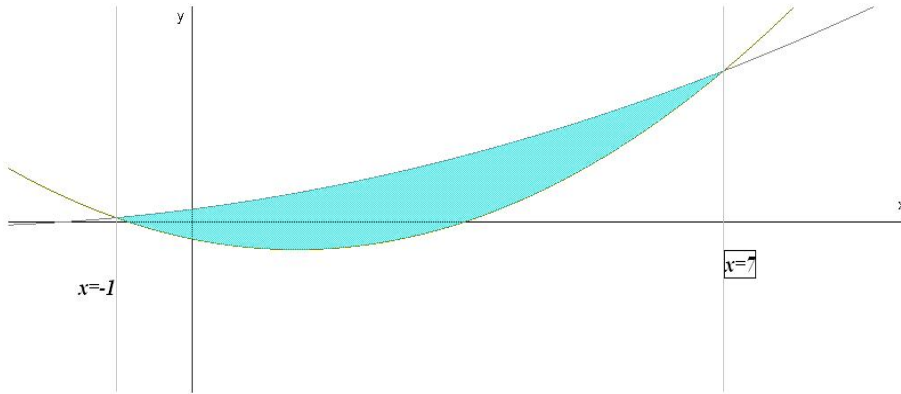
**Solución:**

a)  $\int_1^{3/2} \frac{dx}{1-4x^2} = \left. \frac{\ln|2x+1|}{4} - \frac{\ln|2x-1|}{4} \right|_1^{3/2} = -\frac{1}{4} \ln\left(\frac{3}{2}\right) = -0,1$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = -\frac{1}{2}$

**Problema 5** Calcular el área encerrada por las gráficas de las funciones  $f(x) = 4x^2 - 11x - 12$  y  $g(x) = x^2 + 7x + 9$ .

**Solución:**



$$f(x) = g(x) \implies 4x^2 - 11x - 12 = x^2 + 7x + 9 \implies x = -1, x = 7$$

Tendremos que calcular  $S_1$  con los límites de integración entre -1 y 7.

$$F(x) = \int (f(x) - g(x)) dx = \int (3x^2 - 18x - 21) dx = x^3 - 9x^2 - 21x$$

$$S_1 = \int_{-1}^7 (f(x) - g(x)) dx = F(7) - F(-1) = -256$$

$$S = |S_1| = 256 \text{ u}^2$$