Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Marzo 2015) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)*Dado el sistema

$$\begin{cases} mx+ & 2y+ & mz = & 4 \\ mx- & y+ & 2z = & m \\ 3x+ & & 5z = & 6 \end{cases}$$

1. (2 puntos). Discutir el sistema para los diferentes valores de m.
2. (1 punto). Resolver el sistema para el caso en el que tenga infinitas soluciones.

Solución:

1.

$$\begin{cases} mx+ & 2y+ & mz = & 4 \\ mx- & y+ & 2z = & m \\ 3x+ & & 5z = & 6 \end{cases} \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} m & 2 & m & 4 \\ m & -1 & 2 & m \\ 3 & 0 & 5 & 6 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

$$|A| = 12(1-m) = 0 \Longrightarrow m = 1$$

Si $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema sería Compatible Determinado.

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Luego Rango$(A) = 2$. Como $F_3 = F_1 + 2F_2$ tendríamos que el sistema, en este caso es Compatible Indeterminado.

2. Para $m = 1$:

$$\begin{cases} x+ & 2y+ & z = & 4 \\ x- & y+ & 2z = & 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2 - 5/3\lambda \\ y = 1 + 1/3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 2 *(3 puntos)*Dada la función $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$, se pide hallar:

1. (0,25 puntos). El dominio de definición.

2. (0,25 puntos). Los puntos de corte con el eje OX.

3. (1,25 puntos). Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los valores de x para los cuales se alcanza un máximo o un mínimo.

4. (1,25 puntos). Curvatura y puntos de inflexión.

Solución:

1. $\text{Dom}(f) = R$

2.

x	$f(x)$
0	0

3. $f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 0 \Longrightarrow x = 2;\ x = 3$

	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo: $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$

La función es decreciente en el intervalo: $(2, 3)$

Luego $f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $(2; 28)$ y un mínimo relativo en el $(3; 27)$.

4. $f''(x) = 12x - 30 = 0 \Longrightarrow x = 5/2$

	$(-\infty, 5/2)$	$(5/2, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa$\cap$	Cóncava$\cup$

La función es convexa en el intervalo: $(-\infty, 5/2)$

La función es cóncava en el intervalo: $(5/2, \infty)$

Luego $f(x)$ tiene un punto de inflexión en el punto $(5/2, 55/2)$

Problema 3 *(2 puntos)* Dadas las funciones:

$$f(x) = 4x^2 + 5x - 4, \quad g(x) = 3x^2 + 2x + 6$$

calcular el área encerrada entre ambas.

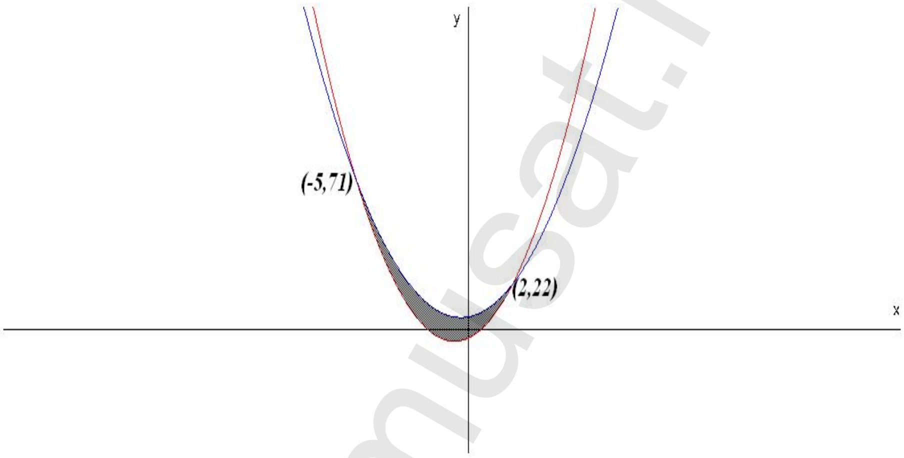
Solución:

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow 4x^2+5x-4 = 3x^2+2x+6 \Longrightarrow x^2+3x-10 = 0 \Longrightarrow x = 2, \;\; x = -5$$

$$F(x) = \int (x^2 + 3x - 10)\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 10x$$

$$\int_{-5}^{2} (x^2 + 3x - 10)\, dx = F(2) - F(-5) = -\frac{343}{6}$$

$$S = \left| -\frac{343}{6} \right| = \frac{343}{6}\ u^2$$



Problema 4 *(2 puntos)* Una fabrica de tintas dispone de 1000 kg de color A, 800 kg de color B y 300 kg de color C, con los que fabrica dos tipos de tinta, una para la etiqueta de un refresco y otra para un cartel. Cada bote de tinta de la etiqueta necesita 10 kg de color A, 5 kg de color B y 5 kg de color C y el de tinta del cartel requiere 5 kg de A y 5 kg de B. Obtiene un beneficio de 30 euros por cada bote de tinta para etiquetas y de 20 euros por cada uno de tinta para carteles. Si vende todos los botes fabricados, ¿cuántos botes de cada tipo de tinta debe fabricar para maximizar su beneficio?, ¿cuál es el beneficio máximo?

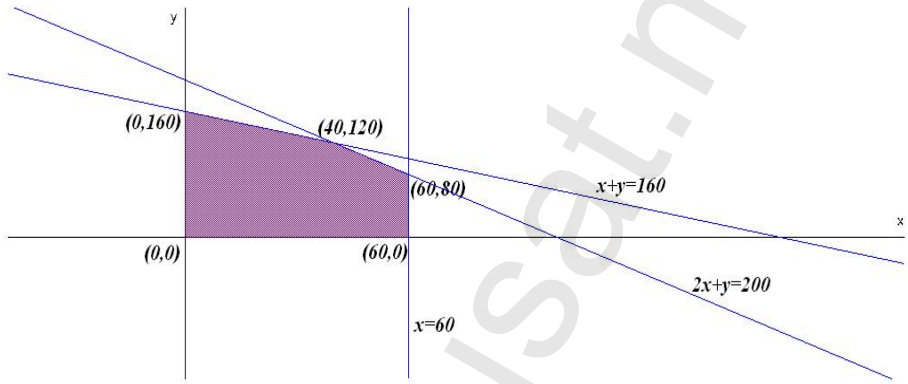
Solución:
Sea x : el número de botes para etiquetas
Sea y : el número de botes para el cartel

	Color A	Color B	Color C	Beneficio
Botes etiqueta	10	5	5	30
Botes cartel	5	5	0	20
Disponible	1000	800	300	

El problema de programación lineal sería el de maximizar la función objetivo: $z(x,y) = 30x + 20y$ dentro de la región factible determinada por las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 10x + 5y \le 1000 \Longrightarrow 2x + y \le 200 \\ 5x + 5y \le 800 \Longrightarrow x + y \le 160 \\ 5x \le 300 \Longrightarrow x \le 60 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

El befición máximo se encuentra en los vértices de la región factible:



$$z(60,0) = 1800$$
$$z(60,80) = 3400$$
$$z(40,120) = 3600$$
$$z(0,60) = 3200$$

El máximo ingreso se obtiene al fabricar 40 botes de tinta para etiquetas y 120 botes de tinta para cartel. El beneficio máximo sería de 3600 euros.

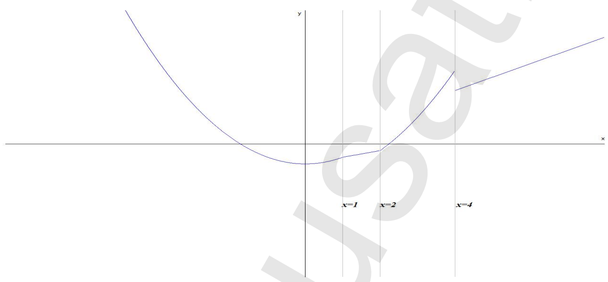
Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Marzo 2015) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Representar gráficamente y estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si} \quad x < 1 \\ x - 3 & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ x^2 - 5 & \text{si} \quad 2 < x < 4 \\ 2x & \text{si} \quad 4 \le x \end{cases}$$

Solución:



- Continuidad en $x = 1$: Es continua

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (x^2-3) = -2, \quad \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} (x-3) = -2, \quad f(1) = -2$$

- Continuidad en $x = 2$: Es discontinua evitable, hay un agujero.

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^-} (x-3) = -1, \quad \lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^+} (x^2-5) = -1, \quad f(2) \text{ no existe}$$

- Continuidad en $x = 4$: Es discontinua no evitable, hay un salto.

$$\lim_{x\longrightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 4^-} (x^2 - 5) = 11, \quad \lim_{x\longrightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 4^+} (2x) = 8$$

Problema 2 *(3 puntos)*Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-5}$. Se pide:

1. Calcular sus asíntotas.
2. Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos.
3. Calcular las rectas tangente y normal a f en el punto de abcisa $x = 1$.

Solución:

1. Asíntotas:

   - **Verticales:** $x = 5$

$$\lim_{x\longrightarrow 5^-} \frac{x^2}{x-5} = \left[\frac{25}{0^-}\right] = -\infty; \quad \lim_{x\longrightarrow 5^+} \frac{x^2}{x-5} = \left[\frac{25}{0^+}\right] = +\infty$$

   - **Horizontales:** No hay; $\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2}{x-5} = \infty$
   - **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2}{x^2-5x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2}{x-5} - x\right) = 5$$

   Luego la asíntota oblicua es $y = x + 5$

2.

$$f'(x) = \frac{x^2-10x}{(x-5)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = 10$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 10)$	$(10, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (10, +\infty)$.
La función es decreciente en el intervalo $(0, 5) \cup (5, 10)$.
La función tiene un máximo en el punto $(0, 0)$ y un mínimo en $(10, 20)$.

3.

$$f(1) = -\frac{1}{4}, \quad m = f'(1) = -\frac{9}{16}$$

Recta tangente: $y + \frac{1}{4} = -\frac{9}{16}(x-1)$
Recta normal: $y + \frac{1}{4} = \frac{16}{9}(x-1)$

Problema 3 *(3 puntos)* Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & m \\ m & -m & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es invertible.

2. Calcular la inversa de A para $m = 2$

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} m & 2 & m \\ m & -m & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -2m^2 - 10m + 12 = 0 \Longrightarrow m = -6, \ m = 1$$

Si $m \neq -6$ y $m \neq 1 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.
Si $m = -6$ o $m = 1 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

2. Para $m = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/8 & 5/8 & -1/2 \\ 1/4 & -1/4 & 0 \\ -3/8 & -3/8 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 4 *(2 puntos)* Se pide:

1. Representar gráficamente la región del plano definida por las inecuaciones:

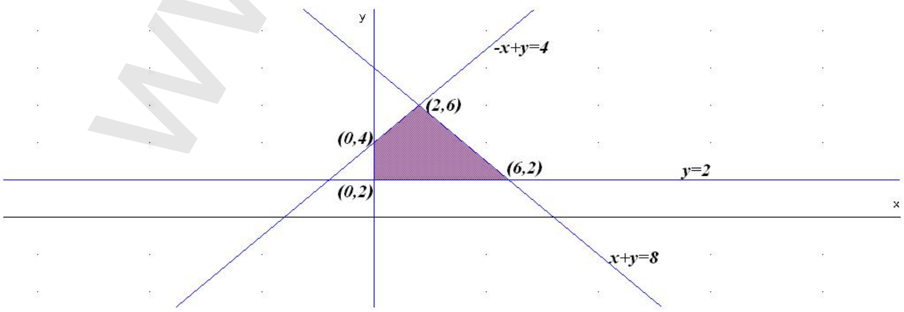
$$0 \leq x, \ \ 2 \leq y, \ \ x + y \leq 8, \ \ -x + y \leq 4$$

2. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $F(x, y) = x + 3y$ en dicha región y los puntos en los que se alcanzan.

Solución:

1.

$$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ -x + y \leq 4 \\ y \geq 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y \leq 8 \\ x - y \geq -4 \\ y \geq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



2. $F(x, y) = x + 3y$

$$\begin{cases} F(0,2) = 6 \text{ Mínimo} \\ F(6,2) = 12 \\ F(2,6) = 20 \text{ Máximo} \\ F(0,4) = 12 \end{cases}$$