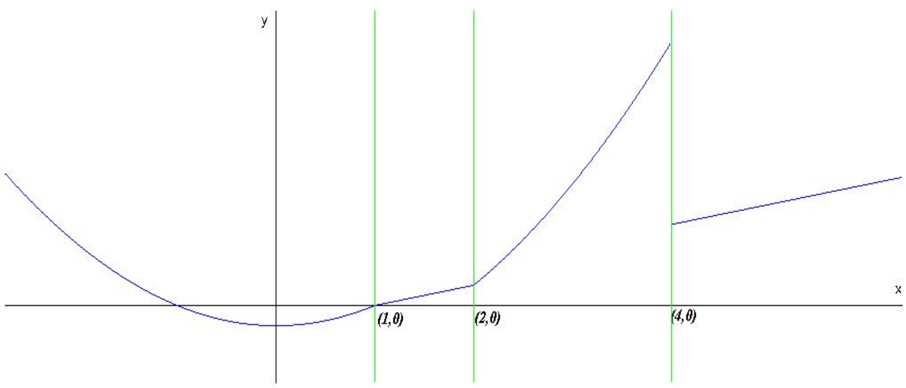
Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Febrero 2015

Problema 1 Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x - 1 & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ x^2 - 3 & \text{si} \quad 2 < x < 4 \\ x & \text{si} \quad 4 \le x \end{cases}$$

en los puntos $x = 1$, $x = 2$ y en $x = 4$. Representarla gráficamente.
Solución:



En $x = 1$ es continua , en $x = 2$ hay una discontinuidad evitable(agujero), y en $x = 3$ es discontinua no evitable(salto).

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 3bx^2 - 3ax + 2 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (2ax^2 - bx + 1) = 2a - b + 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (3bx^2 - 3ax + 2) = 3b - 3a + 2$$

$$2a - b + 1 = 3b - 3a + 2 \Longrightarrow 5a - 4b = 1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 4ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 6bx - 3a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 4a - b; \;\; f'(1^+) = 6b - 3a \Longrightarrow 4a - b = 6b - 3a \Longrightarrow a - b = 0$$

$$\begin{cases} 5a - 4b = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Problema 3 Dada la función $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+2}$, determina

1. Calcula sus asíntotas
2. Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos.

Solución:

1. Asíntotas:

   - Verticales: en $x = -2$

   $$\lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \left[\frac{9}{0^-}\right] = -\infty$$

   $$\lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty$$

   - Horizontales: No hay

   $$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \infty$$

   - Oblicuas: $y = mx + n \Longrightarrow y = x - 4$

   $$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{x^2 + 2x} = 1$$

   $$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{(x-1)^2}{x+2} - x\right) = -4$$

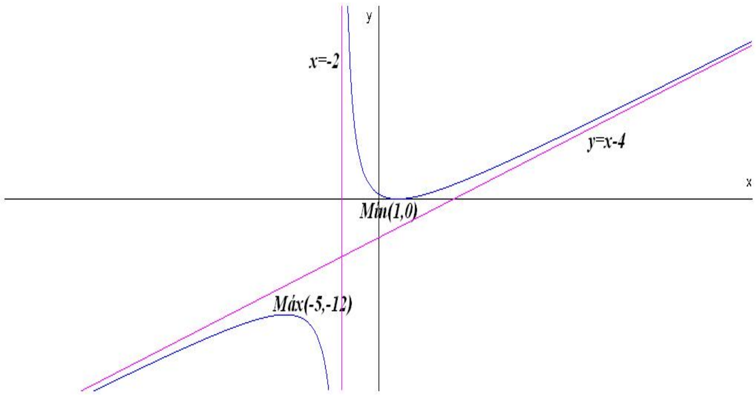
2. Monotonía y extremos:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+2}, \quad f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = -5$$

	$(-\infty,-5)$	$(-5,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

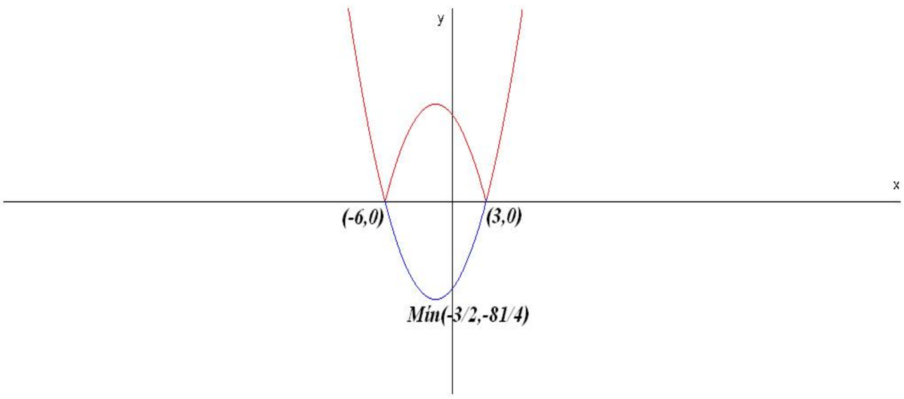
La función es creciente en el intervalo $(-\infty,-5)\cup(1,\infty)$ y decrece en el intervalo $(-5,-2)\cup(-2,1)$

La función tiene un máximo en el punto $(-5,-12)$ y un mínimo en el punto $(1,0)$.



Problema 4 Estudiar la continuidad de la función $f(x)=|x^2+3x-18|$ y representarla gráficamente.

Solución:
Hacemos $g(x)=x^2+3x-18 \Longrightarrow g'(x)=2x+3=0 \Longrightarrow x=-3/2$:



x	y
0	-18
-6	0
3	0
$-3/2$	$-81/4$

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(-\frac{3}{2}\right) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{81}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(-\frac{3}{2}, \frac{81}{4}\right)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 + 3x - 18 & \text{si} & x \leq -6 \\ -(x^2 + 3x - 18) & \text{si} & -6 < x \leq 3 \\ x^2 + 3x - 18 & \text{si} & 3 \leq x \end{array} \right.$$

Continuidad en $x = 3$:

$$\lim_{x \longrightarrow -6^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -6^-} (x^2 + 3x - 18) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow -6^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -6^+} (-x^2 - 3x + 18) = 0$$

$$f(-6) = 0$$

Y f es continua en $x = 3$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3^-} (-x^2 - 3x + 18) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 3^+} (x^2 + 3x - 18) = 0$$

$$f(3) = 0$$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2x + 3 & \text{si} & x \leq -6 \\ -2x - 3 & \text{si} & -6 < x \leq 3 \\ 2x + 3 & \text{si} & 3 \leq x \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = -6$: $f'(-6^-) = -9$ y $f'(-6^+) = 9$, luego no es derivable en $x = -6$.
Derivabilidad en $x = 3$: $f'(3^-) = -9$ y $f'(3^+) = 9$, luego no es derivable en $x = 7$.

Resumiendo: La función es continua en R y derivable en $R - \{-6, 3\}$.

Problema 5 Calcular los números reales a, b y c de la función $f(x) = 2ax^2 - 3bx + c$, sabiendo que esta función pasa por el punto $(0, 1)$ y tiene un extremo en el punto $(2, 4)$.

Solución:

$$f(x) = 2ax^2 - 3bx + c, \quad f'(x) = 4ax - 3b$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 1 \Longrightarrow c = 1 \\ f(2) = 4 \Longrightarrow 8a - 6b + c = 4 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 8a - 3b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -3/8 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x + 1$$