

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)
Noviembre 2014

Problema 1 (5 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -2x + 3y + z = 1 \\ -x + ay + 3z = 3 \end{cases}$$

1. Discutir el sistema para los distintos valores de a .
2. Resolver el sistema para $a = 2$.

(Septiembre 2006 - Opción B)

Solución:

1.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & a & 3 & 3 \end{array} \right) \implies |A| = 20 - 5a = 0 \implies a = 4$$

Si $a \neq 4 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\bar{A}) = 3 = n^\circ$ de incógnitas \implies Sistema Compatible Determinado

$$\text{Si } a = 4 \implies |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2.$$

Como las dos últimas columnas de \bar{A} son iguales, el $\text{Rango}(\bar{A}) = 2 = \text{Rango}(A) < n^\circ$ de incógnitas \implies Sistema Compatible Indeterminado.

2. Si $a = 2$:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -2x + 3y + z = 1 \\ -x + 2y + 3z = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 2 (2 puntos) Un agricultor tiene repartidas sus 10 hectáreas de terreno de barbecho, cultivo de trigo y cultivo de cebada. La superficie dedicada al trigo ocupa 2 hectáreas más que la dedicada a la cebada, mientras que en barbecho tiene 6 hectáreas menos que la superficie total dedicada al cultivo de trigo y cebada. ¿Cuántas hectáreas tiene dedicadas a cada uno de los cultivos y cuántas están en barbecho?

(Junio 2008 - Opción A)

Solución: x : hectáreas de barbecho y : hectáreas de trigo z : hectáreas de cebada

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ y = z + 2 \\ x = y + z - 6 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \\ z = 3 \end{cases}$$

Problema 3 (3 puntos) Se considera la matriz dependiente del parámetro real k :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k \\ k & 1 & k \end{pmatrix}$$

1. Determinése los valores de k para los cuales A tiene inversa.
2. Para $k = 2$, calcúlese (si existe) A^{-1} .
3. Para $k = 1$, calcúlese $(A - 2A^T)^2$.

Nota: La notificación A^T representa a la matriz transpuesta de A . (Modelo 2009 - Opción A)

Solución:

1.

$$|A| = k^2 - k \implies k = 1, \quad k = 0$$

Si $k \neq 0$ y $k \neq 1 \implies \exists A^{-1}$ Si $k = 0$ o $k = 1 \implies$ No existe A^{-1} 2. Si $k = 2$ la inversa existe:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Si $k = 1$:

$$(A - 2A^T)^2 = \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$