

Examen de Matemáticas II (Septiembre 2015)
Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -mx + my + z = 0 \\ x - my + 3z = 4 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

- a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro m .
- b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 0$.
- c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -m & m & 1 & 0 \\ 1 & -m & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right) \quad |A| = -m^2 + 3m - 2 = 0 \implies m = 1, m = 2$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^\circ$
de incógnitas, sería un sistema compatible determinado.

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right); |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego, en este caso, el sistema es incompatible.

Si $m = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right); |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

Como $F_3 = -F_1 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 2$. En este caso el sistema es compatible indeterminado.

b) para $m = 0$:

$$\begin{cases} z = 0 \\ x + 3z = 4 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

c) para $m = 2$:

$$\begin{cases} -2x + 2y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -4 + 4\lambda \\ y = -4 + \frac{7}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 2 (3 puntos) La recta r pasa por $P(2, -1, 0)$ y tiene vector director $(1, \lambda, -2)$; la recta s pasa por $Q(1, 0, -1)$ y tiene vector director $(2, 4, 2)$.

- a) (2 puntos). Calcular $\lambda > 0$ para que la distancia entre r y s sea $\frac{9}{\sqrt{59}}$.
- b) (1 punto). Calcular λ para que r sea perpendicular a la recta que pasa por P y Q .

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, \lambda, -2) \\ P_r = P(2, -1, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (2, 4, 2) \\ P_s = Q(1, 0, -1) \end{cases}$$

a) $\overrightarrow{P_s P_r} = (1, -1, 1)$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_s P_r}, \vec{u}_r, \vec{u}_s]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{18}{2\sqrt{2\lambda^2 + 4\lambda + 29}} = \frac{9}{\sqrt{59}} \implies$$

$$\lambda = 3 \text{ y } \lambda = -5 \text{ (No válida)}$$

$$|[\overrightarrow{P_s P_r}, \vec{u}_r, \vec{u}_s]| = \left| \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \right| = 18$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & \lambda & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \right| = |2(\lambda + 4, -3, 2 - \lambda)| = 2\sqrt{2\lambda^2 + 4\lambda + 29}$$

b)

$$h : \begin{cases} \vec{u}_h = \overrightarrow{QP} = (1, -1, 1) \\ P_h = Q(1, 0, -1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{QP} \perp \vec{u}_h \implies \overrightarrow{QP} \cdot \vec{u}_h = 0$$

$$(1, \lambda, -2) \cdot (1, -1, 1) = 1 - \lambda - 2 = 0 \implies \lambda = -1$$

Problema 3 (2 puntos)

- a) (0,5 puntos). Estudiar el crecimiento de la función $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.
- b) (1,5 puntos). Demostrar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución real y localizar un intervalo de longitud 1 que la contenga.

Solución:

- a) $f'(x) = 2 + 6x + 12x^2 > 0 \implies$ la función es siempre creciente.
- b) Es una función polinómica y, por tanto, continua:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

Por el Teorema de Bolzano la función polinómica tiene puntos de corte con el eje OX y, como esta función es creciente en R , concluimos que sólo hay un punto de corte. (Sólo hay una solución)

$f(0) = 1$ y $f(-1) = -2 \implies$ por el Teorema de Bolzano la función polinómica tiene el punto de corte en el intervalo $(-1, 0)$ de longitud 1.

Problema 4 (2 puntos)

- a) (1 punto). Calcular la integral definida $\int_1^4 (1-x)e^{-x} dx$
- b) (1 punto) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)e^{-x}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^{-x}$

Solución:

- a) $\int_1^4 (1-x)e^{-x} dx = xe^{-x} \Big|_1^4 = 4e^{-4} - e^{-1} = -0,29$
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{e^x} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)e^{-x} = \infty$

Examen de Matemáticas II (Septiembre 2015)
Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} a + x \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ x^2 e^x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(donde $\ln$ denota logaritmo neperiano y a es un número real) se pide:

- a) (1 punto). Calcular el valor de a para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.
- b) (1 punto). Calcular $f'(x)$ donde sea posible.
- c) (1 punto). Calcular $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a + \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = [0 \cdot (-\infty)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 0$$

La función es continua en $x = 0$ si $a = 0$.

b)

$$f'(x) = \begin{cases} \ln x + 1 & \text{si } x > 0 \\ 2xe^x + x^2 e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = 0$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h \ln h}{h} = -\infty$$

$f'(0^+) \neq f'(0^-) \implies$ la función no es derivable en $x = 0 \implies$ la función es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

$$c) \int_{-1}^0 f(x) dx = e^x (x^2 - 2x + 2) - x \Big|_{-1}^0 = 2 - \frac{5}{e} = 0,161$$

Problema 2 (3 puntos) Dados los puntos $P(-1, -1, 1)$, $Q(1, 0, 2)$ y los planos

$$\pi_1 \equiv x - z = 0; \quad \pi_2 \equiv my - 6z = 0; \quad \pi_3 \equiv x + y - mz = 0$$

se pide:

- a) (1 punto). Calcular los valores de m para los que los tres planos se cortan en una recta.

- b) (1 punto). Para $m = 3$, hallar la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta de intersección de los planos π_1 y π_2 .
- c) (1 punto). Hallar la distancia entre los puntos Q y P' , siendo P' el punto simétrico de P respecto al plano π_1 .

Solución:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix} \quad |A| = -m^2 + m + 6 = 0 \implies m = 3, \quad m = -2$$

Para estos valores de m los tres planos se cortan en una recta.

b) Si $m = 3$:

$$h : \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \implies h : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \implies h : \begin{cases} \vec{u}_h = (1, 2, 1) \\ P_h(0, 0, 0) \end{cases}$$

$$\pi : x + 2y + z + \theta = 0 \implies -1 - 2 + 1 + \theta = 0 \implies \theta = 2 \implies$$

$$\pi : x + 2y + z + 2 = 0$$

c) Calculamos la recta $t \perp \pi_1$ y $P \in t$

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_{\pi_1} = (1, 0, -1) \\ P_t(-1, -1, 1) \end{cases} \implies h : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = -1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

Calculamos P'' punto de corte de t con π_1 :

$$(-1 + \lambda) - (1 - \lambda) = 0 \implies \lambda = 1 \implies P''(0, -1, 0)$$

Tenemos:

$$\frac{P + P'}{2} = P'' \implies P' = 2P'' - P = (1, -1, -1)$$

$$d(QP') = |\overrightarrow{QP'}| = |(0, -1, -3)| = \sqrt{10} \, u$$

Problema 3 (2 puntos) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$ y usando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de los siguientes determinantes:

a) (1 punto). $\begin{vmatrix} 2a-2b & c & 5b \\ 2d-2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix}$

b) (1 punto). $\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 2a-2b & c & 5b \\ 2d-2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 2a-2b & b & c \\ 2d-2e & e & f \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$-5 \left(\begin{vmatrix} 2a & b & c \\ 2d & e & f \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2b & b & c \\ -2e & e & f \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \right) = -30$$

b)

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 1 & 2 & 6 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} =$$

$$2 \left(\begin{vmatrix} a & b & 2c \\ 1 & 2 & 6 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 6 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} \right) = -12$$

Problema 4 (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hallar todas las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con A , es decir que cumplen $AB = BA$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+b & a \\ 3c+d & c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a+c = 3a+b \\ 3b+d = a \\ a = 3c+d \\ b = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3b+d \\ b = c \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3c+d & b \\ b & d \end{pmatrix}$$