Examen de Matemáticas II (Modelo 2015)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & m & m \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de A según los valores de m.

b) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz A^{20}.

c) (0,75 puntos). Para $m = -2$, resolver el sistema $AX = O$.

d) (0,75 puntos). Para $m = 0$, resolver el sistema $AX = B$.

Solución:

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & m & m \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \; \forall m \in R \Longrightarrow \text{Rango}(A) < 3$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & m \end{vmatrix} = -2m + 4 = 0 \Longrightarrow m = 2 \Longrightarrow \text{Si } m \neq 2 \;\; \text{Rango}(A) = 2$$

Y si $m = 2$ tenemos $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$

Por tanto, $\text{Rango}(A) = 2 \;\; \forall m \in R$.

b) $|A^{20}| = |A|^{20} = 0^{20} = 0$

c) Se trata de un sistema homogéneo y el $\text{Rango}(A) = 2 <$ nº de incógnitas, luego es un sistema compatible indeterminado.

$$\begin{cases} -2x + 4y + 2z = 0 \\ -x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -1/2\lambda \\ y = -3/4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

d) Para $m = 0$ se observa que $F_1 = 2F_2$ y como $\text{Rango}(A) = 2$ se trata de un sistema compatible indeterminado.

$$\begin{cases} -2x + 4y + 2z = -2 \\ -x = 0 \\ -x + 2y + z = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x + 2y + z = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{-1-\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1}$, se pide:

a) (0,5 puntos). Hallar el dominio de $f(x)$.

b) (1 punto). Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

c) (1,5 puntos). El área del recinto limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x = \pm 1/2$.

Solución:

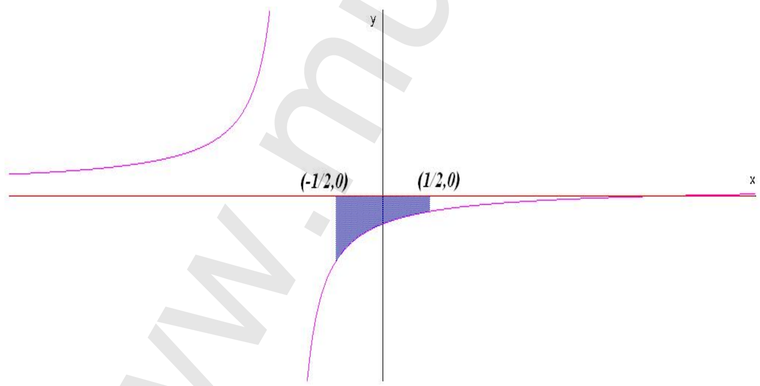
a) $x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = R - \{\pm 1\}$

b) $f'(x) = \dfrac{4}{(x+1)^2} > 0 \Longrightarrow$ La función es creciente en todo el dominio de la función $R - \{\pm 1\}$

c)

$$S_1 = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{x-3}{x+1}\,dx = x - 4\ln(x+1)\Big]_{-1/2}^{1/2} = 1 - 4\ln 3$$

$$S = |S_1| = 4\ln 3 - 1 \; u^2$$



Problema 3 *(2 puntos)* Dadas las rectas: $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \quad ; \quad s : \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ y = z \end{array} \right.$,

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la posición relativa entre ellas. Determinar, en su caso, la intersección entre ambas y el ángulo que forman sus vectores directores.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta perpendicular a las direcciones de r y s, y que pasa por el punto $(0, 0, 0)$.

Solución:

a) $(1+2\lambda)+\lambda=1 \Longrightarrow \lambda=0$ luego las dos rectas se cortan en el punto $(1,0,0)$.

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,1,1)\\ P_r(1,0,0)\end{array}\right. \quad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(-1,1,1)\\ P_s(1,0,0)\end{array}\right.$$

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{u_s}}{|\overrightarrow{u_r}||\overrightarrow{u_s}|}=\frac{-2+1+1}{\sqrt{6}\sqrt{3}}=0 \Longrightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}$$

b)

$$t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(0,-1,1)\\ P_t(0,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l}x=0\\ y=-\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{ccc}i&j&k\\2&1&1\\-1&1&1\end{array}\right|=3(0,-1,1)$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dados los puntos $P_1(1,-1,2)$, $P_2(2,-3,0)$ y $P_3(3,1,2)$, se pide:

a) (0,5 puntos). Determinar la ecuación del plano π que contiene los tres puntos.

b) (0,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta r que pasa por P_1 y es perpendicular a π.

c) (1 punto). Hallar la ecuación de las dos superficies esféricas de radio $\sqrt{17}$ que son tangentes al plano π en el punto P_1.

Solución:

a) $\overrightarrow{P_1P_2}=(1,-2,-2)$, $\overrightarrow{P_1P_3}=(2,2,0)$:

$$\pi:\left|\begin{array}{ccc}1&2&x-1\\-2&2&y+1\\-2&0&z-2\end{array}\right|=0 \Longrightarrow \pi: 2x-2y+3z-10=0$$

b)

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,-2,3)\\ P_r(1,-1,2)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=1+2\lambda\\ y=-1-2\lambda\\ z=2+3\lambda\end{array}\right.$$

c) Calculo una recta r que pase por P_1 y perpendicular a π, la del apartado anterior. Ahora hay que encontrar los dos puntos de esta recta que estan a una distancia $\sqrt{17}$ de P_1 y estos serán los centros de las esferas:
Un punto C de r será $C(1+2\lambda, -1-2\lambda, 2+3\lambda)$

$$|\overrightarrow{CP_1}| = |(2\lambda, -2\lambda, 3\lambda)| = |\lambda|\sqrt{17} = \sqrt{17} \Longrightarrow \lambda = \pm 1$$

$$\begin{cases} \lambda = 1 \Longrightarrow C_1(3,-3,5) \Longrightarrow (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 = 17 \\ \lambda = -1 \Longrightarrow C_2(-1,1,-1) \Longrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 17 \end{cases}$$

Examen de Matemáticas II (Modelo 2015) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dados el punto $P(1,2,-1)$ y las rectas:

$$r: \begin{cases} x+y-z=4 \\ x-y-3z=-2 \end{cases} ; \quad s: \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular la mínima distancia entre r y s.

b) (1 punto). Determinar el punto P' simétrico de P respecto de r.

c) (1 punto). Determinar los puntos de la recta r que equidistan de los planos XY e YZ.

Solución:

a)

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-2,1,-1) \\ P_r(1,3,0) \end{cases}, \quad s: \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (0,0,1) \\ P_s(2,-3,0) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (1,-6,0)$$

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2(-2,1,-1)$$

$$[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{|-11|}{\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{5}\ u$$

$$\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 2, 0)$$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos un plano π perpendicular a r que contenga a P: $\pi : -2x + y - z + \lambda = 0 \Longrightarrow -2 + 2 + 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$ luego el plano buscado es $\pi : -2x + y - z - 1 = 0$
- Calculamos el punto de corte P'' de r y π:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = -t \end{array} \right. \Longrightarrow -2(1-2t)+(3+t)-(-t)-1 = 0 \Longrightarrow t = 0 \Longrightarrow P''(1, 3, 0)$$

- $$P'' = \frac{P + P'}{2} \Longrightarrow P' = 2P''-P = 2(1, 3, 0)-(1, 2, -1) = (1, 4, 1) \Longrightarrow P'(1, 4, 1)$$

c) El plano XY es el plano $\pi' : z = 0$ y el plano YZ es el plano $\pi'' : x = 0$. Sea P''' un punto de la recta r que cumple $d(P''', \pi') = d(P''', \pi'')$ donde $P'''(1 - 2t, 3 + t, -t)$:

$$\frac{|-t|}{1} = \frac{|1 - 2t|}{1} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -t = 1 - 2t \Longrightarrow t = 1 \Longrightarrow H(-1, 4, -1) \\ -t = -1 + 2t \Longrightarrow t = 1/3 \Longrightarrow Q(1/3, 10/3, -1/3) \end{array} \right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Hallar

a) (1 punto). $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}$.

b) (1 punto). $\displaystyle\int (3x + 5) \cos x \, dx$.

c) (1 punto). Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función

$$f(x) = \frac{ex - e^x}{x}$$

.

Solución:

a)

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}} - \frac{-\cos x}{2\sqrt{1-\sin x}}}{1} = 1$$

b) $\displaystyle\int (3x+5)\cos x\,dx = \left[\begin{array}{c} u = 3x+5 \Longrightarrow du = 3dx \\ dv = \cos x \Longrightarrow v = \sin x \end{array} \right] =$

$$(3x+5)\sin x - 3\int \sin x\,dx = (3x+5)\sin x + 3\cos x + C$$

c) $f'(x) = \dfrac{e^x(1-x)}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 1$. Si $x > 1 \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ es decreciente en el intervalo $(1,\infty)$. Si $x < 1 \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ es creciente en el intervalo $(-\infty,0)\cup(0,1)$ En $x = 1$ hay un máximo local.

Problema 3 *(2 puntos)*

a) (1,5 puntos). Hallar X e Y, matrices 2×2, tales que

$$X + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

b) (0,5 puntos). Hallar Z, matriz invertible 2×2, tal que

$$Z^2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} Z^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

.

Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} X + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \\ X + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \\ \\ Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

.

b) $Z^2\cdot 3I\cdot Z^{-1} = 3Z\cdot Z\cdot Z^{-1} = 3Z = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow Z = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

Problema 4 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rrl} mx+ & y = & 0 \\ x+ & my = & 0 \\ mx+ & my = & 0 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Discutirlo según los valores de m.

b) (0,5 puntos). Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} m & 1 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ m & m & 0 \end{array}\right) \quad \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = 0 \Longrightarrow m = \pm 1$$

Si $m \neq \pm 1 \Longrightarrow \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2 =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y, por ser un sistema homogéneo, sería un sistema compatible determinado.

Si $m = -1$:

$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$; $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow$ como antes sería un sistema compatible determinado.

Si $m = 1$:

$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ Las tres filas son iguales y el sistema sería compatible indeterminado. $(x + y = 0)$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = \lambda \end{array}\right.$$