Examen de Matemáticas II (Junio 2015)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

donde ln denota logaritmo neperiano, se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar el dominio de f y sus asíntotas.

b) (0,75 puntos) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 0$.

c) (0,75 puntos) Calcular $\int f(x)\,dx$.

Solución:

a) $x > -1$, y $x \neq \pm 2 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = (-1, 2) \cup (2, \infty)$
Asíntotas:

- Verticales:
  En $x = -2$: no hay asíntota en el intervalo $(-2, -1)$ la función no existe.
  En $x = 2$: $\lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = +\infty$
  En $x = -1$: $\lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} f(x) =$ No existe y $\lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = -\infty$
- Horizontales: $y = 0$; $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} f(x) = 0$
- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = -\dfrac{x^2+4}{(x^2-4)^2} + \dfrac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$.

$f(0) = 0$ y $f'(0) = \dfrac{3}{4} \Longrightarrow y = \dfrac{3}{4}x$ es la recta tangente buscada.

c)

$$\int \left(\frac{x}{x^2-4} + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) dx = \int \frac{x}{x^2-4}\,dx + \int \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx =$$

$$= \frac{\ln|x^2-4|}{2} + \frac{(\ln(x+1))^2}{2} + C$$

Problema 2 *(3 puntos)*

a) (2 puntos). Discutir, según los valores de m, el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 4x+ & 3y+ & (m-1)z = & 0 \\ x- & 2y+ & mz = & 1 \\ 5x+ & my+ & z = & 1 \end{array}\right.$$

b) (1 punto). Resolver el sistema anterior para el caso $m = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & m-1 & 0 \\ 1 & -2 & m & 1 \\ 5 & m & 1 & 1 \end{array}\right) \quad |A| = -3m^2+24m-21 = 0 \Longrightarrow m = 1, \ \ m = 7$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq 7 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ = nº de incógnitas, sería un sistema compatible determinado.
Si $m = 7$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & 1 \end{array}\right); \ |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{array}\right| = -11 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como

$$\left|\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{array}\right| = -24 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego, en este caso, el sistema es incompatible.
Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right); \ |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{array}\right| = -11 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como $F_3 = F_1 + F_2 \Longrightarrow$Rango$(\overline{A})$ =2. En este caso el sistema es compatible indeterminado.

b) para $m = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 4x+ & 3y & = & 0 \\ x- & 2y+ & z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{3}{11} - \frac{3}{11}\lambda \\ y = -\frac{4}{11} + \frac{4}{11}\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 3 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Dados vectores $\overrightarrow{u} = (2, 3, 4)$, $\overrightarrow{v} = (-1, -1, -1)$ y $\overrightarrow{w} = (-1, \lambda, -5)$, encontrar los valores de λ que hacen que el paralelepípedo P generado por $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ tenga volumen 6.

b) (1 punto). Obtener la ecuación de la recta incluida en el plano $z = 0$, con dirección perpendicular a $\overrightarrow{u} = (2, -1, 4)$ y que pasa por el punto $(1, 1, 0)$.

Solución:

a)

$$V = |[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]| = \left| \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -5 \end{vmatrix} \right| = |-2\lambda - 6| = 6 \Longrightarrow \lambda = 0, \ \lambda = -6$$

b) $r \in \pi : z = 0$, $r \perp \overrightarrow{u} = (2, -1, 4)$ y $P(1, 1, 0) \in r$:

$$r \in \pi : z = 0 \Longrightarrow r \perp \overrightarrow{u_\pi} = (0, 0, 1) \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} \times \overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (1, 2, 0)$$

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 0) \\ P_r(1, 1, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi : x - 2y + 2z + 1 = 0$ y la superficie esférica $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$, hallar los planos tangentes a la esfera que son paralelos al plano π.

Solución: La esfera tiene de centro el punto $C(1, 1, 2)$ y radio 3. Construimos una recta r perpendicular a π que pase por C:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, -2, 2) \\ P_r = C(1, 1, 2) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{array} \right.$$

Encontramos los puntos de corte de esta recta r con la esfera:

$$(1+\lambda-1)^2 + (1-2\lambda-1)^2 + (2+2\lambda-2)^2 = 9 \Longrightarrow \lambda = \pm 1 \Longrightarrow P_1(2, -1, 4), \ \ P_2(0, 3, 0)$$

Calculamos:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 2z + \lambda = 0 \\ P_1(2, -1, 4) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : x - 2y + 2z - 12 = 0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 2z + \lambda = 0 \\ P_2(0, 3, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_2 : x - 2y + 2z + 6 = 0$$

Examen de Matemáticas II (Junio 2015)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dados el punto $P(-4,6,6)$, el origen de coordenadas O, y la recta $r:\left\{\begin{array}{l} x=-4+4\lambda\\ y=8+3\lambda\\ z=-2\lambda\end{array}\right.$ se pide:

a) (1 punto). Determinar un punto Q de la recta r, de modo que su proyección Q' sobre $\overline{OP}$ sea el punto medio de este segmento.

b) (1 punto). Determinar la distancia de P a r.

c) (1 punto). ¿Existe algún punto R de la recta r, de modo que los puntos O, P y R estén alineados? En caso afirmativo, encontrar el punto (o los puntos) con esa propiedad o, en caso negativo, justificar la no existencia.

Solución:

a) Un punto de la recta r es $Q(-4+4\lambda, 8+3\lambda, -2\lambda)$ y el punto medio de $\overline{OP}$ será $Q'=\dfrac{O+P}{2}=(-2,3,3)$.
Construimos el vector $\overrightarrow{Q'Q}=(-2+4\lambda, 5+3\lambda, -3-2\lambda)$ y el vector $\overrightarrow{OP}=(-4,6,6)$. Imponemos $\overrightarrow{Q'Q}\perp\overrightarrow{OP}\Longrightarrow\overrightarrow{Q'Q}\cdot\overrightarrow{OP}=0$
$8-16\lambda+30+18\lambda-18-12\lambda=0\Longrightarrow\lambda=2\Longrightarrow Q(4,14,-4)$

b)

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(4,3,-2)\\ P_r(-4,8,0)\end{array}\right. ,\quad \overrightarrow{P_rP}=(0,-2,6)$$

$$|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{P_rP}|=\left|\begin{array}{ccc} i & j & k\\ 4 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 6\end{array}\right|=|(14,-24,-8)|=2\sqrt{209},\ \text{ y }\ |\overrightarrow{u_r}|=\sqrt{29}$$

$$d(P,r)=\frac{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{P_rP}|}{|\overrightarrow{u_r}|}=2\sqrt{\frac{209}{29}}\simeq 5,37\ u$$

c) Para que los puntos O, P y R estén alineados las rectas

$$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{OP}=(-4,6,6)=2(-2,3,3)\\ P_s=O(0,0,0)\end{array}\right.$$

y la recta r tienen que cortarse en el punto R.
Para ver la posición relativa entre ambas construimos el vector auxiliar $\overrightarrow{P_sP_r} = (-4, 8, 0)$ y hacemos el producto mixto:

$$[\overrightarrow{P_sP_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \begin{vmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -124 \neq 0$$

Luego las rectas r y s se cruzan y, por tanto, los puntos en cuestión no están alineados.

Problema 2 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ xe^x + 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de f.

b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' donde sea posible.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_1^3 f(x)\, dx$.

Solución:

a)

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} (xe^x + 1) = 1, \text{ y } f(0) = 1$$

La función es continua en $x = 0$ y, por tanto, en R.

b)

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ e^x + xe^x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{\frac{\sin h}{h} - 1}{h} =$$

$$\lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{\sin h - h}{h^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{\cos h - 1}{2h} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{-\sin h}{2} = 0$$

$$f'(0^+) = 1$$

$f'(0^-) \neq f'(0^+) \Longrightarrow$ la función no es derivable en $x = 0 \Longrightarrow$ la función es derivable en $R - \{0\}$

c) $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx = e^x(x-1)+x\Big]_1^3 = 2e^3+2 = 42,17$

Problema 3 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular A^{15} y A^{20}

b) (1 punto). Resolver la ecuación matricial $6X = B - 3AX$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3.

Solución:

a) $A^1 = A$, $A^2 = A\cdot A = I \Longrightarrow A^n = \begin{cases} A & \text{si } n \text{ impar} \\ I & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$

$A^{15} = A$ y $A^{20} = I$

b) $6X = B - 3AX \Longrightarrow 6X + 3AX = B \Longrightarrow (6I+3A)X = B \Longrightarrow X = (6I+3A)^{-1}B$

$$6I+3A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(6I+3A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ -1/9 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}$$

$$X = (6I+3A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 2/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ -1/9 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix}$, e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1,25 puntos). Hallar el rango de A en función de t.

b) (0,75 puntos). Calcular t para que $\det(A - tI) = 0$.

Solución:

a) $|A| = t^2 - 9t + 14 = 0 \Longrightarrow t = 7$ y $t = 2$. Si $t \neq 7$ y $t \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.
Si $t = 7$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}; \ |A| = 0, \ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Si $t = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \ |A| = 0, \ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

b)

$$A - tI = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A - tI| = -2(-7 + t) = 0 \Longrightarrow t = 7$$