

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)

Marzo 2014

Problema 1 En una etapa contrareloj de 40 Km en el último Tour de Francia, la velocidad, en Km/h de un determinado ciclista, en función de la distancia recorrida, viene dada por la expresión siguiente:

$$V(x) = -0,05x^2 + 3,2x \quad 0 \leq x \leq 40$$

siendo x la distancia recorrida en Km. Se pide:

- a) ¿Qué distancia ha recorrido el ciclista cuando alcanza la velocidad máxima?
- b) ¿Cuál es el valor de dicha velocidad máxima?
- c) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $V(x)$.
Justificar la respuesta.

(Extremadura, Junio 2013)

Solución:

a)

$$V'(x) = -0,1x + 3,2 = 0 \implies x = 32$$

$$V''(x) = -0,1 \implies V''(32) = -0,1 < 0 \implies x = 32 \text{ es un máximo}$$

b) La velocidad máxima será $V(32) = 51,2$ km/h.

c)

	$(0, 32)$	$(32, 40)$
$V'(x)$	+	-
$V(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

La función es creciente en el intervalo $(0, 32)$ y decreciente en el $(32, 40)$

Problema 2 Dada la función $f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3}$, se pide:

- a) Calcular su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
- b) Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales, si las hay.
- c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- d) Máximos y mínimos locales.

- e) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores. (Comunidad Valenciana, Junio 2013)

Solución:

- a) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1, 3\}$ y los puntos de corte son: $(0, -4/3)$ y $(2, 0)$.

- b) Asíntotas:

- Verticales: en $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3} = \left[\frac{-1}{0^+} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3} = \left[\frac{-1}{0^-} \right] = +\infty$$

en $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3} = \left[\frac{-1}{0^-} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3} = \left[\frac{-1}{0^+} \right] = -\infty$$

- Horizontales: $y = -1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3} = -1$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

- c) Monotonía

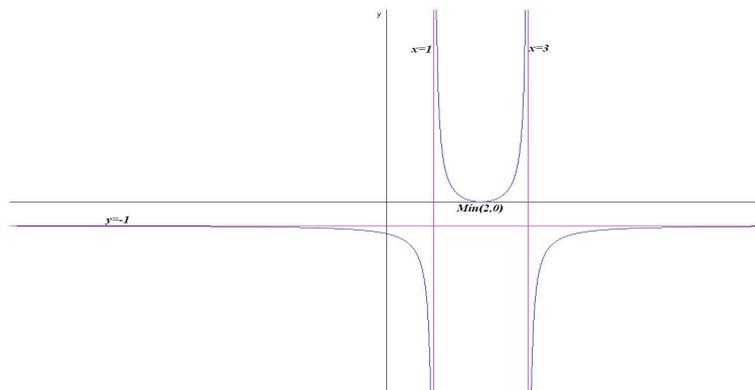
$$f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 4}{x^2 - 4x + 3}, \quad f'(x) = \frac{2(x - 2)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = 0 \implies x = 2$$

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(2, 3) \cup (3, \infty)$ y decrece en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$

- d) La función tiene un mínimo en el punto $(2, 0)$.

- e) Representación gráfica



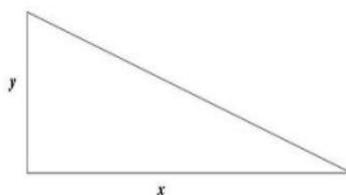
Problema 3 Calcula el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo tal que la suma de las longitudes de sus dos catetos vale 6 cm.

Solución:

Si los catetos valen x e y tendremos que el área del triángulo viene dada por $S = \frac{x \cdot y}{2}$, pero sabemos que $x + y = 6 \implies y = 6 - x$. Sustituyendo la segunda expresión en la primera tenemos que $S(x) = \frac{x(6-x)}{2} = \frac{6x - x^2}{2}$, función de la que tendremos que encontrar el mínimo. Para ello recurrimos a $S'(x) = 0$, y al criterio de la segunda derivada:

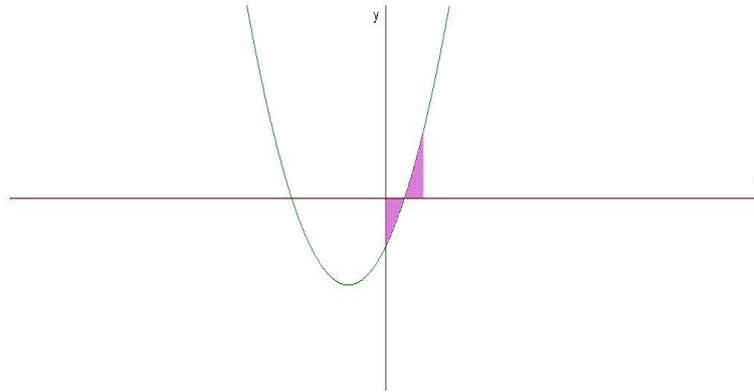
$$S'(x) = 3 - x = 0 \implies x = 3$$

$S''(x) = -1 < 0$ luego en $x = 3$ tenemos un máximo y la solución pedida sería $x = 3$ e $y = 3$, con un área $S(3) = \frac{9}{2} u^2$



Problema 4 Calcular el área encerrada por la gráfica de $f(x) = x^2 + 4x - 5$ el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$

Solución:



$$S_1 = \int_0^1 (x^2 + 4x - 5) dx = \left. \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x \right|_0^1 = -\frac{8}{3}$$

$$S_2 = \int_1^2 (x^2 + 4x - 5) dx = \left. \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x \right|_1^2 = -\frac{10}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{18}{3} = 6 \text{ u}^2$$