Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Marzo 2014

Problema 1 El número de socios de un club de fútbol ha seguido el modelo definido por la función siguiente: $f(x) = x^3 - 72x^2 + 1296x + 1000$, $0 \le x \le 60$, donde x = número de meses transcurridos desde su fundación, $f(x)$ = número de socios.

a) ¿Cuántos socios tenía el club en el momento de su fundación? ¿Cuántos tenía al cabo de medio año? ¿Y al de un año? ¿Cuántos tenía transcurridos los 60 meses?

b) Calcular, si los hubiere, el máximo y el mínimo relativos de la función. ¿A qué número de socios corresponderían?

c) Esboza la gráfica de la función y comenta la evolución del número de socios.

(País Vasco, Junio 2013)
Solución:

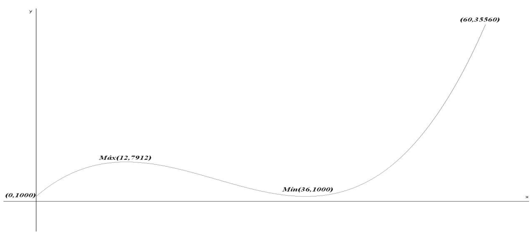
a)
- $f(0) = 1000$ socios en el momento de su fundación.
- $f(6) = 6400$ socios al medio año.
- $f(12) = 7912$ socios al año.
- $f(60) = 35560$ socios a los 60 meses.

b) $f'(x) = 3x^2 - 144x + 1296 = 0 \Longrightarrow x = 12$ y $x = 36$.

	$(0,12)$	$(12,36)$	$(36,60)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función tiene un máximo en $(12, 7912)$ y un mínimo en $(36, 1000)$.

c) La gráfica sería: Durante los primeros 12 meses el número de socios



aumento hasta los 7912, a partir de este momento comenzó a descender hasta llegar al mes 36, momento en el que habría 1000 socios, la misma cifra con la que se inaguró. Desde este momento y hasta los 60 meses, el número de socios aumenta considerablemente consiguiendo un máximo absoluto en el momento de llegar a los 60 meses.

Problema 2 Dada la función $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$, determinar:

a) Su dominio.

b) Sus cortes con los ejes.

c) Sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) Sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

e) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores. (Aragón, Junio 2013)

Solución:

a) $Dom(f) = R - \{-1\}$

b) Los puntos de corte son: $(0,2)$ y $(-2,0)$.

c) Asíntotas:

- Verticales: en $x = -1$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{x+2}{x+1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x+2}{x+1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 1$

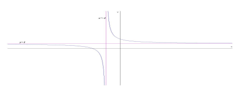
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x+2}{x+1} = 1$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

d) Monotonía: f es decreciente en $R - \{-1\}$.

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1}, \quad f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0 \ \ \forall x \in R - \{-1\}$$

e) Representación gráfica



Problema 3 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \\ x^2-2x+2 & \text{si} \quad 0 \le x < 3 \\ 3x-1 & \text{si} \quad 3 \le x \le 5 \end{cases}$

a) Dibujar su gráfica aproximada en el intervalo $[-2, 5]$

b) Estudiar la continuidad de la función en todos los puntos del intervalo $[-2, 5]$.

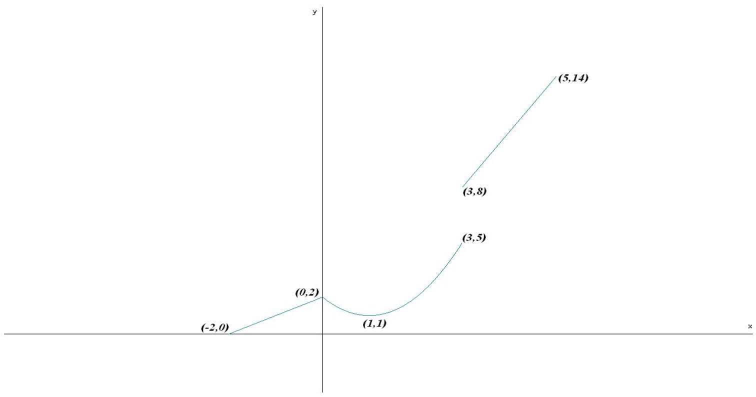
c) Calcular los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en el intervalo $[-2, 5/2]$.

d) Calcula $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

(Comunidad Valenciana, Junio 2013)

Solución:

a) Representación gráfica



b)

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-}(x+2) = 2 = \lim_{x\longrightarrow 0^+}(x^2-2x+2) = f(2)$$

Luego la función es continua en $x = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 3^-}(x^2-2x+2) = 5 \neq \lim_{x\longrightarrow 3^+}(3x-1) = 8$$

La función es discontinua no evitable en $x = 3$, pega un salto.

c) A la vista de la gráfica se observa un mínimo absoluto en $(-2, 0)$, un máximo absoluto en $(5/2, 13/4)$ y un mínimo relativo en $(1, 1)$.

d)

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (x^2-2x+2)\,dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right]_1^2 = \frac{4}{3}$$

Problema 4 Dada la función $f(x) = 4x - 2x^2$, se pide:

a) Encontrar una primitiva F de f verificando que $F(6) = 0$.

b) Dibujar la gráfica de la función f y calcular el área limitada por la curva y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 4$.

(Asturias, Junio 2013)

Solución:

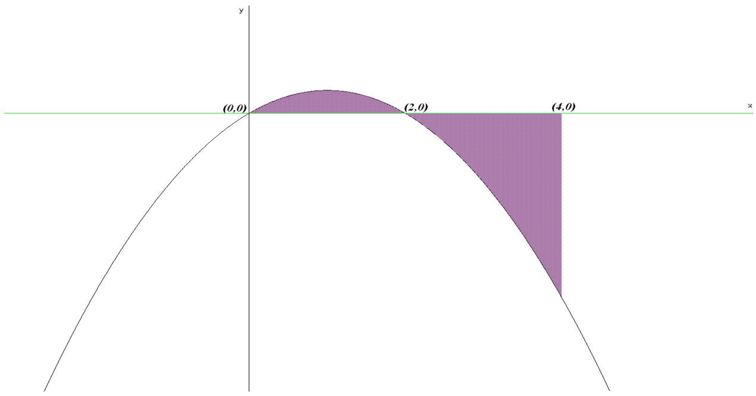
a)

$$F(x) = \int (4x - 2x^2)\, dx = 2x^2 - \frac{2x^3}{3} + C$$

$$F(6) = 2 \cdot 6^2 - \frac{2}{3} \cdot 6^3 + C = 0 \Longrightarrow C = 72$$

$$F(x) = 2x^2 - \frac{2x^3}{3} + 72$$

b) la función f corta al eje OX en los puntos: $f(x) = 0 \Longrightarrow (0,0)$ y $(2,0)$. En $x = 2$, dentro del intervalo $[0,4]$, la función corta el eje de abcisas, luego habrá que calcular dos áreas, una S_1 en el intervalo $[0,2]$ y otra S_2 en el intervalo $[2,4]$.



$$S_1 = \int_0^2 (4x - 2x^2))\, dx = \left. 2x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$S_2 = \int_2^4 (4x - 2x^2))\, dx = \left. 2x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_2^4 = -\frac{40}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{48}{3}\ u^2$$