

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)
Noviembre 2013

Problema 1 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+ & y+ & z = & 4 \\ 2x+ & my- & z = & m+2 \\ x- & y- & 5z = & -6 \end{cases}$$

1. Discutir el sistema según los valores del parámetro m
2. Resuelve el sistema para $m = 0$ y para el caso en el que tenga infinitas soluciones.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & m & -1 & m+2 \\ 1 & -1 & -5 & -6 \end{array} \right); \quad |A| = -6m + 6 = 0 \implies m = 1$$

- Si $m \neq 1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -5 & -6 \end{array} \right); \quad |A| = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Como $\text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) < \text{n}^\circ$ de incógnitas $\implies$ el sistema es compatible indeterminado. (Infinitas soluciones)

2. Si $m = 1$:

$$\begin{cases} x+ & y+ & z = & 4 \\ 2x+ & y- & z = & 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 5 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Si $m = 0$:

$$\begin{cases} x+ & y+ & z = & 4 \\ 2x- & & z = & 2 \\ x- & y- & 5z = & -6 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5/3 \\ y = 1 \\ z = 4/3 \end{cases}$$

Problema 2 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Llamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \implies \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies$$

$$\begin{pmatrix} a - 2c & b - 2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2a + b \\ c & -2c + d \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a - 2c = a \implies c = 0 \\ b - 2d = -2a + b \implies a = d \\ c = c \implies c = 0 \\ d = -2c + d \implies c = 0 \end{cases}$$

Luego $X = \begin{pmatrix} d & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

Problema 3 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ -1 & 3 & m \\ 8 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 0$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 3 \\ -1 & 3 & m \\ 8 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 3m^2 + 23m - 58 = 0 \implies m = 2, \quad m = -29/3$$

Si $m = 2$ o $m = -29/3 \implies |A| = 0 \implies$ no existe A^{-1} .

Si $m \neq 2$ y $m \neq -29/3 \implies |A| \neq 0 \implies$ existe A^{-1} .

2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 8 & -3 & 5 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -15/58 & 7/29 & 9/58 \\ -5/58 & 12/29 & 3/58 \\ 21/58 & -4/29 & -1/58 \end{pmatrix}$$

Problema 4 (2 puntos). Una empresa de elaboración de alimentos para ganado vacuno tiene tres tipos de pienso, A , B y C . El pienso A lo vende a 2 euros el kg, el B a 3 euros el kg y el C a 8 euros el kg. Un ganadero quiere comprar 1500 kg a un coste de 4 euros el kg, con la condición de que la cantidad de pienso B tiene que ser el doble del de C . Calcular la cantidad que hay que mezclar de cada tipo de pienso.

Solución:

Sean: x el n° de kg de A , y el n° de kg de B y z el n° de kg de C .

$$\begin{cases} x + y + z = 1500 \\ 2x + 3y + 8z = 6000 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 375 \\ y = 750 \\ z = 375 \end{cases}$$