

Examen de Matemáticas II (Septiembre 2014)
Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4},$$

se pide:

- a) (1 punto). Determinar el dominio de f y sus asíntotas.
- b) (1 punto). Calcular $f'(x)$ y determinar los extremos relativos de $f(x)$.
- c) (1 punto). Calcular $\int_0^1 f(x) dx$.

Solución:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4} = \frac{x+4+x(x+1)}{(x+1)(x+4)} = \frac{x^2+2x+4}{(x+1)(x+4)}$$

a) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, -4\}$ y asíntotas:

■ Verticales:

$$x = -1: \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \left[\frac{3}{0^-} \right] = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \left[\frac{3}{0^+} \right] = +\infty$$

$$x = -4: \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \left[\frac{12}{0^+} \right] = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \left[\frac{3}{0^-} \right] = -\infty$$

■ Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x+4}{(x+1)(x+4)} = 1$$

■ Oblicuas: No hay por haber horizontales

b)

$$f'(x) = \frac{3(x^2-4)}{(x+1)^2(x+4)^2} = 0 \implies x = \pm 2$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

Luego la función tiene un máximo en el punto $(-2, -2)$ y un mínimo en el punto $(2, 2/3)$.

c)

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} + 1 - \frac{4}{x+4} \right) dx =$$

$$= x + \ln|x+1| - 4 \ln|x+4| \Big|_0^1 = 1 + 9 \ln 2 - 4 \ln 5 = 1 - \ln \left(\frac{625}{512} \right) \simeq 0,8$$

Problema 2 (3 puntos) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a-1 & a & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (1 punto). Determinar el valor o valores de a para los cuales no existe la matriz inversa A^{-1} .
- (1 punto). Para $a = -2$, hallar la matriz inversa A^{-1} .
- (1 punto). Para $a = 1$, calcular todas las soluciones del sistema lineal $AX = O$.

Solución:

- $|A| = -a(a^2 - 3a + 2) = 0 \implies a = 0, a = 1 \text{ y } a = 2$.
Si $a = 0$ o $a = 1$ o $a = 2 \implies |A| = 0 \implies \nexists A^{-1}$.
Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ y $a \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \exists A^{-1}$.

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/12 & 1/3 & -1/4 \\ -5/24 & -1/6 & -1/8 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $a = 1$ y $AX = O$ tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 3 (2 puntos) Dados los puntos $A(2, 0, -2)$, $B(3, -4, -1)$, $C(5, 4, -3)$ y $D(0, 1, 4)$, se pide:

- (1 punto). Calcular el área del triángulo de vértices A , B y C .
- (1 punto). Calcular el volumen del tetraedro $ABCD$.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB} = (1, -4, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (3, 4, -1)$:

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(0, 4, 16)| = 2\sqrt{17} \ u^2$$

b) $\overrightarrow{AB} = (1, -4, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 4, -1)$ y $\overrightarrow{AD} = (-2, 1, 6)$

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} \right| = \frac{50}{3} \ u^3$$

Problema 4 (2 puntos) Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + z - 1 = 0, \quad \pi_2 \equiv x + z + 2 = 0, \quad \pi_3 \equiv x + 3y + 2z - 3 = 0,$$

se pide:

- (1 punto). Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por π_1 y π_2 .
- (1 punto). Calcular el seno del ángulo que la recta del apartado anterior forma con el plano π_3 .

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} 2x + z - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda \\ z = -5 \end{cases}$$

b) $\overrightarrow{u_{\pi_3}} = (1, 3, 2)$ y $\overrightarrow{u_r} = (0, 1, 0)$:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\overrightarrow{u_{\pi_3}} \cdot \overrightarrow{u_r}}{|\overrightarrow{u_{\pi_3}}| |\overrightarrow{u_r}|} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \sin \alpha$$

Examen de Matemáticas II (Septiembre 2014) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (3 puntos) Dados el plano π y la recta r siguientes:

$$\pi \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0, \quad r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = 1 + t, \end{cases}$$

se pide:

- a) (1 punto). Estudiar la posición relativa de r y π .
- b) (1 punto). Calcular la distancia entre r y π .
- c) (1 punto). Obtener el punto P' simétrico de $P(3, 2, 1)$ respecto del plano π .

Solución:

- a) $2(1 - 2t) - (2 - 2t) + 2(l + t) + 3 = 0 \implies 5 = 0!$ Luego la recta r es paralela al plano π . Está claro que $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi = -2 \cdot 2 + (-2)(-1) + 1 \cdot 2 = 0 \implies \vec{u}_r \perp \vec{u}_\pi$

- b) $P_r(1, 2, 1)$:

$$d(P_r, \pi) = \frac{2 - 2 + 2 + 3}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{5}{3} u$$

- c) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $s \perp \pi$ que pase por P :

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = \vec{u}_\pi = (2, -1, 2) \\ P_s = P(3, 2, 1) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

- Encontramos el punto P'' de corte entre s y π :

$$2(3 + 2\lambda) - (2 - \lambda) + 2(1 + 2\lambda) + 3 = 0 \implies \lambda = -1 \implies P''(1, 3, -1)$$

- P'' es el punto medio entre P y el punto buscado P' :

$$\frac{P + P'}{2} = P'' \implies P' = 2P'' - P = (2, 6, -2) - (3, 2, 1) = (-1, 4, -3)$$

Problema 2 (3 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5 \sin x}{2x} + \frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ xe^x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Se pide:

- a) (1 punto). Hallar, si existe, el valor de a para que $f(x)$ sea continua.
- b) (1 punto). Decidir si la función es derivable en $x = 0$ para algún valor de a .

c) (1 punto). Calcular la integral:

$$\int_1^{\ln 5} f(x) dx$$

,

donde $\ln$ denota logaritmo neperiano.

Solución:

a) La función es continua si: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{5 \sin x}{2x} + \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{10 \sin x + 2x}{4x} =$$

$$\left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{10 \cos x + 2}{4} = 3$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (xe^x + 3) = 3$$

$$\blacksquare f(0) = a \implies a = 3$$

b) De ser derivable en $x = 0$ sólo sería para $a = 3$, para cualquier otro valor de a la función no sería continua y, por tanto, tampoco sería derivable. Para que sea derivable tiene que cumplirse que $f'(0^-) = f'(0^+)$:

$$\blacksquare f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{5 \sin(0+h)}{2(0+h)} + \frac{1}{2} - 3}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{5 \sin h - 5h}{2h^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{5 \cos h - 5}{4h} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{5 \sin h}{4} = 0$$

$$\blacksquare f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(0+h)e^{0+h} + 3 - 3}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{he^h}{h} = 1$$

■ Como $f'(0^-) \neq f'(0^+) \implies$ la función no es derivable en $x = 0$.

c)

$$\int (xe^x + 3) dx = \left[\begin{array}{l} u = x \implies du = dx \\ dv = e^x dx \implies v = e^x \end{array} \right] = xe^x - \int e^x dx + 3x = 3x + e^x(x-1) + C$$

$$\int_1^{\ln 5} f(x) dx = [3x + e^x(x-1)]_1^{\ln 5} = 8(\ln 5 - 1) = 4,88$$

Problema 3 (2 puntos) Dada la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde B es una matriz cuadrada de tamaño 2×2 , se pide:

- a) (1 punto). Calcular el valor o valores de a para los que esta ecuación tiene solución.
- b) (1 punto). Calcular B en el caso $a = 1$.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) $A \cdot B = C \implies B = A^{-1}C$, luego la ecuación tiene solución siempre que exista A^{-1} :

$$|A| = 7a - 6 = 0 \implies a = \frac{6}{7}$$

$$\text{Si } a = 7/6 \implies |A| = 0 \implies \nexists A^{-1}.$$

$$\text{Si } a \neq 7/6 \implies |A| \neq 0 \implies \exists A^{-1}.$$

- b) $B = A^{-1}C$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = A^{-1}C = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 4 (2 puntos) Estudiar el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro a .

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 + F_1 \\ F_4 + F_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & -7 & a+10 \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 5 & 0 & -7 & a+5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 6 & -7 & a+10 \\ 3 & -2 & 11 \\ 5 & -7 & a+5 \end{vmatrix} = 12 - 2a = 0 \implies a = 6$$

Si $a \neq 6 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 4$.

Si $a = 6 \implies |A| = 0 \implies \text{Rango}(A) < 4$. Y como

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3$$