

Examen de Matemáticas II (Junio 2014)
Selectividad-Coincidentes-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (3 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x- & y+ & z = & 1 \\ & y- & z = & a \\ x+ & y- & z = & 3a^2 \end{cases}$$

se pide:

- a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de a .
- b) (1 punto). Resolverlo cuando sea posible.

Solución:

$$\text{a) } \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & -1 & 3a^2 \end{array} \right) \implies |A| = |A_1| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq$$

$$0 \implies \text{Rango}(A) = 2 \forall a \in \mathbb{R}.$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = 3a^2 - 2a - 1 = 0 \implies a = 1, \quad a = -1/3$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a \\ 1 & -1 & 3a^2 \end{vmatrix} = -3a^2 + 2a + 1 = 0 \implies a = 1, \quad a = -1/3$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & 3a^2 \end{vmatrix} = 0$$

En conclusión si $a \neq 1$ y $a \neq -1/3 \implies \text{Rango} \bar{A} = 3 \neq \text{Rango}(A)$ y el sistema sería incompatible. Por el contrario si $a = 1$ o $a = -1/3 \implies \text{Rango} \bar{A} = 2 = \text{Rango}(A) < n^\circ$ de incógnitas y el sistema sería compatible indeterminado.

b) Para $a = -1/3$:

$$\begin{cases} x- & y+ & z = & 1 \\ & y- & z = & -1/3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2/3 \\ y = -1/3 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Para $a = 1$:

$$\begin{cases} x- & y+ & z = & 1 \\ & y- & z = & 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 2 (3 puntos) Dada la función $f(x) = \frac{mx^3 - 1}{x^2}$, se pide:

- (1 punto). Hallar el valor de m para el que f tiene un extremo relativo en $x = 1$.
- (1 punto). Obtener las asíntotas de f para el caso $m = -2$.
- (1 punto). En el caso $m = -2$, estudiar los intervalos de crecimiento de f y calcular los puntos de corte con los ejes. Esbozar la gráfica de f y sus asíntotas.

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{mx^3 + 2}{x^3}; \quad f'(1) = 0 \implies m + 2 = 0 \implies m = -2$$

b) Para $m = -2$: $f(x) = \frac{-2x^3 - 1}{x^2}$

- Verticales en $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x^3 - 1}{x^2} = \left[\frac{-1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^3 - 1}{x^2} = \left[\frac{-1}{0^+} \right] = +\infty$$

- Horizontales no hay: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 - 1}{x^2} = -\infty$
- Oblicuas $y = mx + n$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3 - 1}{x^3} = -2$$

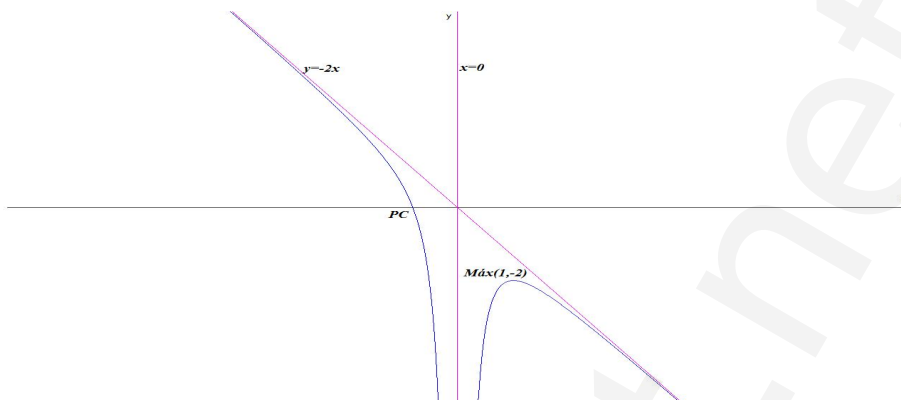
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-2x^3 - 1x^2 + 2x) = 0$$
$$y = -2x$$

c) Puntos de corte con eje de ordenadas: no hay

Puntos de corte con eje de abscisas: $-2x^3 - 1 = 0 \implies x = -1/\sqrt[3]{2} \implies (-1/\sqrt[3]{2}, 0)$.

$$f'(x) = \frac{-2x^3 + 2}{x^3}; \quad f''(x) = \frac{-6}{x^4}; \quad f''(1) = -6 < 0$$

Luego hay un máximo en el punto $(1, -2)$



Problema 3 (2 puntos) Dado el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 1$, se pide:

- (1 punto). Obtener las rectas que pasan por el origen de coordenadas, son paralelas al plano π y cortan al plano $z = 0$ con un ángulo de 45 grados.
- (1 punto). Hallar la ecuación de la esfera de centro el origen $O(0, 0, 0)$ que es tangente a π .

Solución:

a) Sean las rectas $r : \begin{cases} \vec{u}_r = (a, b, c) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = a\lambda \\ y = b\lambda \\ z = c\lambda \end{cases}$ que se cortan en

el punto $O(0, 0, 0)$.

Estas rectas tiene que formar un ángulo de 45° con el plano $z = 0$, es decir:

$$\sin \alpha = \frac{(a, b, c) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{0 + 0 + 1^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies$$

$$\sqrt{2}c = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \implies c^2 = a^2 + b^2$$

Por otro lado $\pi \parallel r \implies \vec{u}_\pi \perp \vec{u}_r$:

$$\vec{u}_\pi \cdot \vec{u}_r = (a, b, c) \cdot (2, -1, 1) = 2a - b + c = 0 \implies c = b - 2a$$

$$c^2 = b^2 + 4a^2 - 4ab \implies b^2 + 4a^2 - 4ab = a^2 + b^2 \implies a(3a - 4b) = 0 \implies$$

$$\begin{cases} a = 0 \implies c = b \implies \vec{u}_r = (0, b, b) = b(0, 1, 1) \\ a = \frac{4b}{3} \implies c = -\frac{b}{3} \implies \text{No válida } \left(-\frac{b}{3}\right)^2 \neq \left(\frac{4b}{3}\right)^2 + b^2 \end{cases}$$

$$r_b : \begin{cases} x = 0 \\ y = b\lambda \\ z = b\lambda \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- b) El radio de la esfera es $r = d(O, \pi) = \frac{|0 - 0 + 0 - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ y su centro en $O(0, 0, 0)$:

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 \implies 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 = 1$$

Problema 4 (2 puntos) Sean los puntos $A(2, 1, 0)$ y $B(0, 1, -4)$. Se pide:

- a) (1 punto). Hallar la ecuación del plano π respecto del cual A y B son simétricos.
 b) (1 punto). Calcular los puntos situados sobre la recta determinada por A y B que están a $\sqrt{6}$ unidades de distancia de $P(2, -1, 1)$.

Solución:

a) $d(A, \pi) = d(B, \pi) \implies \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2 + (z + 4)^2} \implies \pi : x + 2z + 3 = 0$

b) $r : \begin{cases} \vec{u}_r = \overrightarrow{BA} = 2(1, 0, 2) \\ P_r = A(2, 1, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 2\lambda \end{cases} \implies Q(2 + \lambda, 1, 2\lambda)$

$$|\overrightarrow{PQ}| = |(\lambda, 2, 2\lambda - 1)| = \sqrt{\lambda^2 + 4 + (2\lambda - 1)^2} = \sqrt{6} \implies$$

$$5\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0 \implies \begin{cases} \lambda = 1 \implies Q_1(3, 1, 2) \\ \lambda = -\frac{1}{5} \implies Q_2\left(\frac{9}{5}, 1, -\frac{2}{5}\right) \end{cases}$$

Examen de Matemáticas II (Junio 2014) Selectividad-Coincidentes-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (3 puntos) Dados el plano $\pi \equiv 5x - 3y + 4z - 10 = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x - 2}{3} = \frac{y + 6}{1} = \frac{z - 8}{-3}$, se pide:

- a) (1 punto). Hallar la distancia de la recta al plano.
 b) (1 punto). Hallar la proyección del punto $P(5, -2, 1)$ sobre el plano π .
 c) (1 punto). Hallar la proyección del punto $Q(-1, 7, 3)$ sobre la recta r .

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (3, 1, -3) \\ P_r(2, -6, 8) \end{cases} \quad \vec{u}_\pi = (5, -3, 4)$$

- a) Cuando se habla de distancia de una recta a un plano entendemos que la recta es paralela al plano, si lo cortase la distancia sería cero y si está contenida en el plano también sería cero. Comprobamos el paralelismo:

$\vec{u}_r \perp \vec{u}_\pi = (3, 1, -3) \cdot (5, -3, 4) = 0 \implies$ lo que nos indica que o es paralela o está contenida en el plano.

$$d(r, \pi) = d(P_r, \pi) = \frac{|10 + 18 + 32 - 10|}{\sqrt{25 + 9 + 16}} = 5\sqrt{2} \text{ u}$$

- b) Proyección de P sobre π :

- Calculamos la recta $t \perp \pi / P \in t$:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_t = (5, -3, 4) \\ P_t(5, -2, 1) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5 + 5\lambda \\ y = -2 - 3\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}$$

- P' proyección de P será el punto de corte de t y π :

$$5(5 + 5\lambda) - 3(-2 - 3\lambda) + 4(1 + 4\lambda) - 10 = 0 \implies \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$P' \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -1 \right)$$

- c) Proyección de Q sobre r :

- Calculamos un plano $\pi' \perp r / Q \in \pi'$:

$$\vec{u}_\pi \perp \vec{u}_r = (3, 1, -3) \implies \pi' : 3x + y - 3z + \lambda = 0$$

$$3(-1) + 7 - 3(3) + \lambda = 0 \implies \lambda = 5 \implies \pi' : 3x + y - 3z + 5 = 0$$

- Q' proyección de Q será el punto de corte de r y π' :

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (3, 1, -3) \\ P_r(2, -6, 8) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -6 + \lambda \\ z = 8 - 3\lambda \end{cases}$$

$$3(2 + 3\lambda) + (-6 + \lambda) - 3(8 - 3\lambda) + 5 = 0 \implies \lambda = 1 \implies Q'(5, -5, 5)$$

Problema 2 (3 puntos) Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ tiene determinante igual a 10, se pide calcular justificadamente:

- a) (1 punto). El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 2a + b & b & c \\ 4 & 2 & 3 \\ 2x + y & y & z \end{pmatrix}$.

b) (1 punto). El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2a & 2b & 2c \end{pmatrix}$.

c) (1 punto). El determinante de la matriz $(BB^t)^3$, donde $B = \begin{pmatrix} a+2 & b+4 & c+6 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$
y B^t es la matriz transpuesta de B .

Solución:

$$a) \begin{vmatrix} 2a+b & b & c \\ 4 & 2 & 3 \\ 2x+y & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & b & c \\ 2 & 2 & 3 \\ 2x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & c \\ 2 & 2 & 3 \\ y & y & z \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 20$$

$$b) \begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 2 & 3 \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -60$$

$$c) |B| = \begin{vmatrix} a+2 & b+4 & c+6 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 10$$

$$|(BB^t)^3| = |BB^t|^3 = (|B||B^t|)^3 = (|B|^2)^3 = |B|^6 = 10^6$$

Problema 3 (2 puntos) Sea $f(x)$ una función con derivada continua tal que $f(0) = 1$ y $f'(0) = 2$. Se considera la función $g(x) = 2(f(x))^2$ y se pide:

a) (1 punto). Hallar la recta tangente a la curva $y = g(x)$ en $x = 0$.

b) (1 punto). Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{e^{-x} - 1}$.

c) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' , donde sea posible.

Solución:

a) $y - b = m(x - a)$, $a = 0$, $b = g(0) = 2(f(0))^2 = 2$ y $m = g'(0) = 4f(0)f'(0) = 8$ (ya que $g'(x) = 4f(x)f'(x)$) Luego la recta tangente tiene de ecuación: $y - 2 = 8(x - 0) \implies y = 8x + 2$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{e^{-x} - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{-e^{-x}} = -2$

Problema 4 (2 puntos) Calcular:

a) (1 punto). $\int_1^{3/2} \frac{dx}{1 - 4x^2}$

b) (1 punto). $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$, donde \ln denota logaritmo neperiano.

Solución:

$$\text{a) } \int_1^{3/2} \frac{dx}{1-4x^2} = \frac{1}{4} (\ln |2x+1| - \ln |2x-1|) \Big|_1^{3/2} = -\frac{1}{4} \ln \left(\frac{3}{2} \right) = -0,1$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x \ln x + x - 1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x \ln x + x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\ln x + \frac{x}{x} + 1} &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$