Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Marzo 2013) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)*Dado el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} ax+ & y+ & 3z= & 0\\ x+ & ay+ & 2z= & 1\\ x+ & ay+ & 3z= & -1 \end{array}\right.$$

a) (2 puntos). Discutir el sistema para los diferentes valores de a.

b) (1 punto). Resolver el sistema para $a = 0$

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} ax+ & y+ & 3z= & 0\\ x+ & ay+ & 2z= & 1\\ x+ & ay+ & 3z= & -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|r} a & 1 & 3 & 0\\ 1 & a & 2 & 1\\ 1 & a & 3 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$|A| = a^2 - 1 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$n$^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema sería Compatible Determinado.

Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 0, \quad \left|\begin{array}{rr} 1 & 3\\ -1 & 2 \end{array}\right| = 5 \neq 0$$

Luego Rango$(A) = 2$. Como:

$$\left|\begin{array}{rrr} -1 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & -1 \end{array}\right| = -11 \neq 0$$

Tendríamos Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 0, \quad \left|\begin{array}{rr} 1 & 3\\ 1 & 2 \end{array}\right| = -1 \neq 0$$

Luego Rango$(A) = 2$. Como:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Tendríamos Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

b) Para $a = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} & y+ & 3z = & 0 \\ x+ & & 2z = & 1 \\ x+ & & 3z = & -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 6 \\ z = -2 \end{array} \right.$$

Problema 2 *(3 puntos)*Dada la función $f(x) = 3x^3 - x^2 - 2x$, se pide hallar:

a) (0,25 puntos). El dominio de definición.

b) (0,25 puntos). Los puntos de corte con el eje OX.

c) (1,25 puntos). Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los valores de x para los cuales se alcanza un máximo o un mínimo.

d) (1,25 puntos). Curvatura y puntos de inflexión.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = R$

b)

x	$f(x)$
0	0
1	0
$-2/3$	0

c) $f'(x) = 9x^2 - 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x \simeq 0,6;\ \ x \simeq -0,37$

	$(-\infty; -0,37)$	$(-0,37; 0,6)$	$(0,6; \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo: $(-\infty; -0,37) \cup (0,6; \infty)$

La función es decreciente en el intervalo: $(-0,37; 0,6)$

Luego $f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $(-0,37; 0,45)$ y un mínimo relativo en el $(0,6; -0,91)$.

d) $f''(x) = 18x - 2 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{9}$

	$(-\infty; 1/9)$	$(1/9; \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa$\cap$	Cóncava$\cup$

La función es convexa en el intervalo: $(-\infty; 1/9)$

La función es cóncava en el intervalo: $(1/9, \infty)$

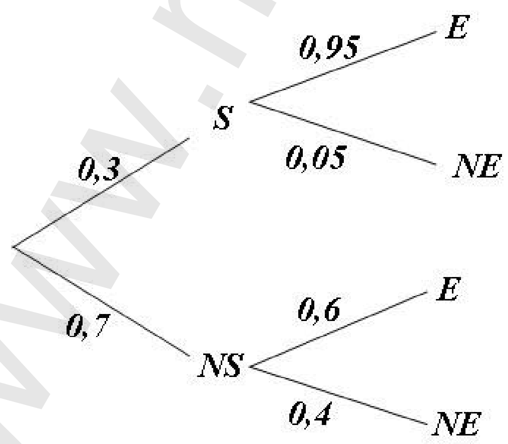
Luego $f(x)$ tiene un punto de inflexión en el punto $(1/9; -20/243) \simeq (0,11; -0,12)$

Problema 3 *(2 puntos)* Se sabe que el 30 % de los individuos de una población tiene estudios superiores; también se sabe que, de ellos, el 95 % tiene empleo. Además, de la parte de la población que no tiene estudios superiores, el 60 % tiene empleo.

a) (1 punto). Calcule la probabilidad de que un individuo, elegido al azar, tenga empleo.

b) (1 punto). Se ha elegido un individuo aleatoriamente y tiene empleo; calcule la probabilidad de que tenga estudios superiores.

Solución:



a) $P(E) = 0,3 \cdot 0,95 + 0,7 \cdot 0,6 = 0,705$

b)
$$P(S|E) = \frac{P(E|S) \cdot P(S)}{P(E)} = \frac{0,95 \cdot 0,3}{0,705} = 0,4$$

Problema 4 *(2 puntos)* Calcúlese la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes:

a) Obtener dos caras y una cruz en el lanzamiento de tres monedas equilibradas e indistinguibles.

b) Obtener una suma de puntos igual a seis o siete en el lanzamiento de dos dados de seis caras equilibrados e indistinguibles.

Solución:

a) $P(\text{ dos caras y una cruz}) = P(CCX) + P(CXC) + P(XCC) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

b)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Tenemos:

$$P(\text{Suma}\,6) = \frac{5}{36}$$

$$P(\text{Suma}\,7) = \frac{1}{6}$$

$$P(6 \text{ o } 7) = \frac{11}{36}$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Marzo 2013) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Una fábrica de papel tiene almacenados 4000 kg de pasta de papel normal y 3000 kg de pasta de papel reciclado. La fábrica produce dos tipos diferentes de cajas de cartón. Para el primer tipo se utilizan 0,2 kg de pasta de papel normal y 0,1 kg de pasta de papel reciclado, mientras que para la caja de segundo tipo se utilizan 0,2 kg de pasta de papel normal y 0,3 kg de pasta de papel reciclado. Los beneficios que la fábrica obtiene por la venta de cada caja son, respectivamente, 5 euros para el primer tipo y 6 euros para el segundo tipo de caja. Utilizando técnicas de programación lineal, calcula cuántas cajas de cada tipo deben fabricar para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto asciende el beneficio máximo obtenido?

Solución:

Sea x : en número de cajas tipo 1

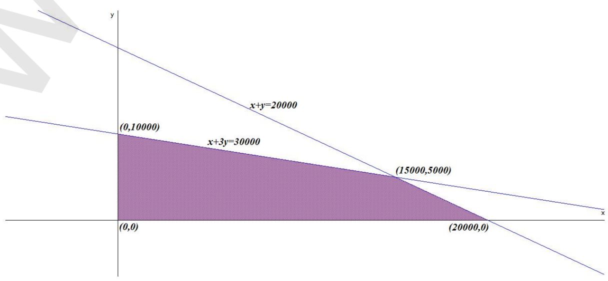
Sea y : en número de cajas tipo 2

	Tipo 1	Tipo 2	Papel disponible
Papel normal	$0,2$	$0,2$	4000
Papel reciclado	$0,1$	$0,3$	3000
Beneficios	5	6	

El problema de programación lineal sería el de maximizar la función objetivo: $z(x,y) = 5x + 6y$ dentro de la región factible determinada por las siguientes restricciones:

$$\left\{\begin{array}{l} 0,2x + 0,2y \le 4000 \\ 0,1x + 0,3y \le 3000 \\ x, y \ge 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y \le 20000 \\ x + 3y \le 30000 \\ x, y \ge 0 \end{array}\right.$$

El befición máximo se encuentra en los vértices de la región factible:



$$\begin{aligned} &z(0,10000) = 60000 \\ &z(15000,5000) = 105000 \\ &z(20000,0) = 100000 \end{aligned}$$

El beneficio máximo se obtiene al fabricar 15000 cajas del tipo 1 y 5000 cajas del tipo 2 y asciende a 105000 euros.

Problema 5 *(2 puntos)* Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2x-1} & \text{si} \quad x \le 0 \\ x^2 + x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

en el punto $x = 0$.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{x}{2x-1} = 0 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} x^2 + x = 0 \\ \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0 \Longrightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 0$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(2x-1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = 1 \end{cases}$$

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+) \Longrightarrow f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

Problema 2 *(3 puntos)* Se pide:

a) (1 punto). Dada la función real de variable real definida por $f(x) = ax^3 - bx + c$, calcular los coeficientes a, b y c, teniendo en cuenta que la gráfica de la función pasa por el punto $(0,0)$ y además presenta un máximo en el punto $(1,2)$.

b) (2 puntos). Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x}$ calcular:

- (0,5 puntos). Su Dominio de definición y puntos de corte.
- (0,5 puntos). Su signo y simetría, si la hay.
- (1 punto). Sus asíntotas.

Solución:

a) Tenemos: $f(x) = ax^3 - bx + c \;\; f'(x) = 3ax - b$

- La gráfica de la función pasa por el punto $(0,0) \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow c = 0$
- La función presenta un máximo en el punto $(1,2) \Longrightarrow f'(1) = 0 \Longrightarrow 3a - b = 0$
- La gráfica de la función pasa por el punto $(1,2) \Longrightarrow f(1) = 2 \Longrightarrow a - b + c = 2$

$$\left\{\begin{array}{l} c = 0 \\ 3a - b = 0 \\ a - b + c = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -1 \\ b = -3 \\ c = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = -x^3 + 3x$$

b) (2 puntos). Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x}$ calcular:

- Su Dominio de definición sería $\text{Dom}(f) = R - \{0\}$ y los puntos de corte:
  Con el eje OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow$ No hay
  Con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (-\sqrt{3}, 0), \;\; (\sqrt{3}, 0)$
- Su signo:

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

  Su simetría: $f(-x) = -\dfrac{x^2 - 3}{x} = -f(x) \Longrightarrow$ la función es impar y, por tanto, simétrica respecto al origen de coordenadas.
- Asíntotas:
  a) Verticales: Tenemos la recta $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \left[\frac{-3}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \left[\frac{-3}{0^+}\right] = -\infty$$

  b) Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

c) Oblicuas: $y = mx + n$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x} - x \right) =$$

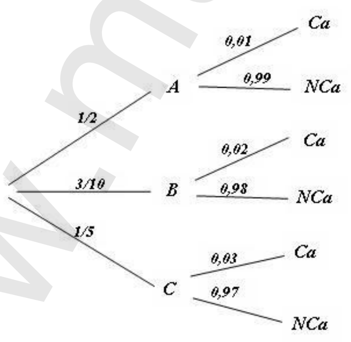
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{-3}{x} - x \right) = 0 \Longrightarrow y = x$$

Problema 3 *(2 puntos)* En el departamento de lácteos de un supermercado se encuentran mezclados y a la venta 100 yogures de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un yogur esté caducado es 0,01 para la marca A; 0,02 para la marca B y 0,03 para la marca C. Un comprador elige un yogur al azar.

a) (1 punto). Calcular la probabilidad de que el yogur esté caducado.

b) (1 punto). Sabiendo que el yogur elegido está caducado, ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?

Solución:



$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{3}{10}, \quad P(C) = \frac{1}{5}$$

a)

$$P(Ca) = \frac{1}{2} \cdot 0,01 + \frac{3}{10} \cdot 0,02 + \frac{1}{5} \cdot 0,03 = 0,017$$

b)

$$P(B|Ca) = \frac{P(Ca|B)P(B)}{P(Ca)} = \frac{0,02 \cdot \frac{3}{10}}{0,017} = 0,3529$$