Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2012

Problema 1 Discutir el siguiente sistema en función del parámetro λ y resolverlo para $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} x+ & y+ & z = & 1 \\ \lambda x+ & 2y & = & \lambda \\ 2x+ & \lambda y+ & 4z = & -1 \end{cases}$$

(Murcia Junio 2011)

Solución:

1.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 2 & 0 & \lambda \\ 2 & \lambda & 4 & -1 \end{array}\right); \ |A| = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2$$

- Si $\lambda \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).
- Si $\lambda = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right); \ |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{array}\right| = 6 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

2. $\lambda = 1$

$$\begin{cases} x+ & y+ & z = & 1 \\ x+ & 2y & = & 1 \\ 2x+ & y+ & 4z = & -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -3 \\ z = -3 \end{cases}$$

Problema 2 Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calcule $A^2 - B \cdot C^t$.

2. Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + B = 2 \cdot C$.

(Andalucía Junio 2011)

Solución:

1. $A^2 - B \cdot C^t = \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$

2. $A \cdot X + B = 2 \cdot C \Longrightarrow X = A^{-1}(2C - B) = \begin{pmatrix} 7 & -30 & -13 \\ 3 & -13 & -6 \end{pmatrix}$

Problema 3 Considera el sistema de ecuaciones en forma matricial $A \cdot X = 0$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & 4 \\ 3 & m & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Determina para qué valores de m la matriz A no tiene inversa.

2. Calcula, si es posible, la inversa de A cuando $m = 0$.

3. Determina las soluciones del sistema $A \cdot X = O$ cuando $m = 0$.

(Islas Baleares Junio 2011)

Solución:

1. $|A| = m^2 + 4m + 3 = 0 \Longrightarrow m = -1$ y $m = -3$:
   Si $m \neq -1$ y $m \neq -3 \Longrightarrow A$ tiene inversa.
   Si $m = -1$ o $m = -3 \Longrightarrow A$ no tiene inversa.

2. Si $m = 0$:
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & 4/3 & 4 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Si $m = 0$ el sistema $AX = O$ es un sistema homogéneo y $|A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 \Longrightarrow$ el sistema es compatible determinado y la única solución es la trivial: $x = y = x = 0$.

Problema 4 Un grupo de estudiantes financia su viaje de fin de curso con la venta de participaciones de lotería, por importe de 1, 2 y 5 euros. Han recaudado, en total, 600 euros y han vendido el doble de participaciones de 1 euro que de 5 euros. Si han vendido un total de 260 participaciones, calcula el número de participaciones que han vendido de cada importe.
(Castilla-León Junio 2011)

Solución:

Sea x n$^{\mathrm{o}}$ de particuipaciones de 1 euro, y n$^{\mathrm{o}}$ de particuipaciones de 2 euro y z n$^{\mathrm{o}}$ de particuipaciones de 5 euro.

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=260 \\ x+2y+5z=600 \\ x=2z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=160 \\ y=20 \\ z=80 \end{array}\right.$$