Examen de Matemáticas 2^{o}Bachillerato(CN)

Marzo 2012

Problema 1 Sean las rectas

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1} \qquad s: \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2 \\ z = 1+\lambda \end{cases}$$

se pide:

1. Estudiar la posición de ambas rectas.
2. Distancia que las separa.
3. Encontrar una recta perpendicular a ambas y que las corta.
4. Encontrar una recta que pasa por el punto $P(1,1,0)$ y corta a ambas rectas.

Solución:

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,1,-1) \\ P_r(1,0,1) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (-1,0,1) \\ P_s(1,2,1) \end{cases}$$

1. Construimos el vector $\overrightarrow{P_rP_s} = (0,2,0)$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{se cruzan}$$

2.

$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ u$$

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,-1,1)$$

3.

$$\pi_1: \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (1,-1,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (2,1,-1) \\ P_r(1,0,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1: \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ -1 & 1 & y \\ 1 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow y+z-1 = 0$$

$$\pi_2: \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (1,-1,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1,0,1) \\ P_s(1,2,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2: \begin{vmatrix} 1 & -1 & x-1 \\ -1 & 0 & y-2 \\ 1 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x+2y+z-6 = 0$$

$$t: \begin{cases} y+z-1 = 0 \\ x+2y+z-6 = 0 \end{cases}$$

4.

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{PP_r} = (0,-1,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (2,1,-1) \\ P(1,1,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \left| \begin{array}{rrr} 0 & 2 & x-1 \\ -1 & 1 & y-1 \\ 1 & -1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow y+z-1=0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{PP_s} = (0,1,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1,0,1) \\ P(1,1,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_2 : \left| \begin{array}{rrr} 0 & -1 & x-1 \\ 1 & 0 & y-1 \\ 1 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x-y+z=0$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} y+z-1=0 \\ x-y+z=0 \end{array} \right.$$

Problema 2 Determina el punto simétrico del punto $A(-3,1,6)$ respecto a la recta r de ecuación

$$r : x-1 = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{2}$$

Solución:

Se sigue el siguiente procedimiento:

- Se calcula un planoπ perpendicular a r que contenga al punto A:

  $$x+2y+2z+\lambda = 0 \Longrightarrow -3+2+12+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -11$$

  El plano es $\pi : x+2y+2z-11 = 0$

- Calculamos el punto de corte entre π y r:

  $$\left\{ \begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = -3+2\lambda \\ z = -1+2\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow (1+\lambda)+2(-3+2\lambda)+2(-1+2\lambda)-11 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2$$

  luego el punto $A'(3,1,3)$.

- Tenemos:

  $$\frac{A+A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A'-A = 2(3,1,3)-(-3,1,6) = (9,1,0)$$

Problema 3 Dada la recta

$$r : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

encontrar los puntos de la recta que se encuentran a distancia 3 del punto $P(2,0,1)$

Solución:

Construimos la esfera de centro P y radio $r = 3$:

$$(x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9$$

Los puntos que buscamos serán los puntos de corte de esta esfera con la recta

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{array} \right.$$

Luego:

$$(2\lambda - 2)^2 + (1+\lambda)^2 + (-2-\lambda)^2 = 9 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{3}, \ \ \lambda = 0$$

Si $\lambda = 0 \Longrightarrow P_1(0, 1, -1)$.

Si $\lambda = \frac{1}{3} \Longrightarrow P_2\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.