

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)

Febrero 2011

Problema 1 (7 puntos). Dados la recta $r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{-1}$ y el plano $\pi : x - y + 2z - 2 = 0$ se pide:

1. Una recta perpendicular a π que pase por el origen de coordenadas.
2. Ángulo que forman r y π .
3. Ángulo que forma π con $\pi' : 2x - y + 3z - 1 = 0$
4. Distancia del punto $P(3, -1, 5)$ a la recta r .
5. Los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas y el volumen del tetraedro que forma con estos puntos y el origen de coordenadas.
6. La altura sobre la base formada con los tres puntos de corte calculados en el apartado anterior.
7. Encontrar un plano paralelo a π que esté a una distancia de 5 unidades de él.

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, -2, -1) \\ P_r(1, 0, 1) \end{cases} \quad \vec{u}_\pi = (1, -1, 2)$$

1.

$$s : \begin{cases} \vec{u}_s = \vec{u}_\pi = (1, -1, 2) \\ P_r = O(0, 0, 0) \end{cases} \implies s : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

2.

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\pi|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_\pi|} = \frac{1}{6} \implies \alpha = 9^\circ 35' 38''$$

3. $\vec{u}_\pi = (1, -1, 2)$ y $\vec{u}_{\pi'} = (2, -1, 3)$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u}_\pi \cdot \vec{u}_{\pi'}|}{|\vec{u}_\pi| \cdot |\vec{u}_{\pi'}|} = \frac{9}{\sqrt{84}} \implies \alpha = 10^\circ 53' 22''$$

4. $\vec{P_r P} = (2, -1, 4)$

$$d(P, r) = \frac{|\vec{P_r P} \times \vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|} = \sqrt{21} \, u$$

$$|\overrightarrow{P_r P} \times \overrightarrow{u_r}| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \right| = |3(3, 2, -1)| = 3\sqrt{14}$$

5. Con OX hacemos $y = 0$ y $z = 0 \implies A(2, 0, 0) \implies \overrightarrow{OA} = (2, 0, 0)$

Con OY hacemos $x = 0$ y $z = 0 \implies B(0, 2, 0) \implies \overrightarrow{OB} = (0, 2, 0)$

Con OZ hacemos $x = 0$ y $y = 0 \implies C(0, 0, -1) \implies \overrightarrow{OC} = (0, 0, -1)$

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{2}{3} u$$

6. Un punto de π puede ser $P(2, 0, 0)$ y un plano paralelo a π puede ser $\pi' : x + y - 2z + \lambda = 0$

$$d(P, \pi') = \frac{|2 + \lambda|}{\sqrt{6}} = 5 \implies |2 + \lambda| = 5\sqrt{6}$$

$$x + y - 2z = -2 + 5\sqrt{6} \implies x + y - 2z - 2 - 5\sqrt{6} = 0$$

$$x + y - 2z = -2 - 5\sqrt{6} \implies x + y - 2z + 2 + 5\sqrt{6} = 0$$

Problema 2 (3 puntos). Sean las rectas:

$$r : \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2} \text{ y } s : \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Se pide:

1. Decidir que posición tienen en el espacio.
2. Ángulo que forman.
3. Calcular la ecuación de la recta en forma continua de una recta perpendicular a ambas y que pase por el punto $P(2, 3, 4)$.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, 2) \\ P_r(0, 1, -1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (0, 1, 1) \\ P_s(3/2, 0, 1/2) \end{cases}$$

$$1. \overrightarrow{P_r P_s} = (5/2, -1, -3/2) = \frac{1}{2}(5, -2, -3)$$

$$[\overrightarrow{P_r P_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \begin{vmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

2.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \alpha = 30^\circ$$

3.

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = (-1, 1, -1) \\ P_t(2, 3, 4) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$$

$$t : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{-1}$$

$$\vec{u}_t = \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 1, -1)$$