Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Mayo 2013

Problema 1 Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 4ax^2 - bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ ax^2 + 2bx - 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Hallar a y b de manera que f cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$. Encontrar aquellos puntos que el teorema asegura su existencia.

Solución:

1. f es continua en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la continuidad en $x = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (4ax^2 - bx + 1) = 4a - b + 1 \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (ax^2 + 2bx - 2) = a + 2b - 2 \end{array} \right. \Longrightarrow a - b = -1$$

2. f es derivable en ambas ramas, para cualquier valor de a y b, hay que calcular a y b para afirmar la derivabilidad en $x = 1$

$$f'(x) = \begin{cases} 8ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ \\ 2ax + 2b & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(1^-) = 8a - b \\ f'(1^+) = 2a + 2b \end{array} \right. \Longrightarrow 2a - b = 0$$

3. $$\left\{ \begin{array}{l} a - b = -1 \\ 2a - b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \end{array} \right.$$

4. Tenemos:

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 2x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 + 4x - 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 8x - 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x + 4 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Esta función cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio, es decir, es continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en el $(0, 2)$. El Teorema afirma que existe al menos un punto $c \in (0, 2)$ que cumple

$f'(c)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{9}{2}.$

Si cogemos la primera rama $c<1$:

$$f'(c)=8c-2=9/2\Longrightarrow c=13/16 \text{ si vale}$$

Si cogemos la segunda rama $c\geq 1$:

$$f'(c)=2c+4=9/2\Longrightarrow c=1/4 \text{ no vale}$$

El punto $c\in(0,2)$ al que hace referencia el teorema es $c=13/16$.

Problema 2 Hallar una función polinómica de tercer grado tal que pasa por el punto $(0,3)$, tenga un extremo relativo en $x=-1$ y un punto de inflexión en $(1,2)$

Solución:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\quad f'(x)=3ax^2+2bx+c,\quad f''(x)=6ax+2b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0)=3\Longrightarrow d=3\\ f(1)=2\Longrightarrow a+b+c+d=2\\ f'(-1)=0\Longrightarrow 3a-2b+c=0\\ f''(1)=0\Longrightarrow 6a+2b=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1/11\\ b=-3/11\\ c=-9/11\\ d=3\end{array}\right.$$

$$f(x)=\frac{1}{11}x^3-\frac{3}{11}x^2-\frac{9}{11}x+3,$$

$f''(-1)=-6a+2b=-\frac{6}{11}-\frac{6}{11}=-\frac{12}{11}<0\Longrightarrow$ el extremo en el punto donde $x=-1$ es un máximo.

Problema 3 Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^2-8}{x^2-1}$, determina

1. Asíntotas.
2. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
3. Máximos y mínimos relativos.
4. Curvatura.
5. Puntos de Inflexión.

Solución:

1. Asíntotas:

- Verticales: Las únicas posibles son $x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{2x^2-8}{x^2-1} = \left[\frac{-6}{0^-}\right] = +\infty \qquad \lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{2x^2-8}{x^2-1} = \left[\frac{-6}{0^+}\right] = -\infty$$

y $x = -1$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} 2x^2-8x^2-1 = \left[\frac{-6}{0^+}\right] = -\infty \qquad \lim_{x\longrightarrow -1^+} 2x^2-8x^2-1 = \left[\frac{-6}{0^-}\right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2x^2-8}{x^2-1} = 2$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

2. Monotonía:
$$f'(x) = \frac{12x}{(x^2-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Decrece	Crece

La función Decrece en el intervalo: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ y Crece en el intervalo: $(0, 1) \cup (1, \infty)$

3. Máximos y mínimos relativos: A la vista del apartado anterior, la función presenta un Mínimo en el punto $(0, 8)$.

4. Curvatura:
$$f''(x) = -\frac{12(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} \neq 0$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	Convexa	Cóncava	Convexa

5. No hay puntos de Inflexión.

6. $a = 2 \Longrightarrow b = f(2) = 0$

$$m = f'(2) = 8/3 \Longrightarrow y = \frac{8}{3}(x-2), \text{ recta tangente}$$

$$y = -\frac{3}{8}(x-2), \text{ recta normal}$$