Examen de Matemáticas II (Septiembre 2013)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2}$$

se pide:

a) (0,75 puntos). Hallar las asíntotas de su gráfica.

b) (1,75 puntos). Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcular sus puntos de inflexión.

c) (0,5 puntos). Esbozar la gráfica de la función.

Solución:

$$f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2} = \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)}$$

a) Asíntotas:

- Verticales: $x = -1$ y $x = 4$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)} = \left[\frac{-135}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)} = \left[\frac{-135}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 4^-} \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)} = \left[\frac{40}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 4^-} \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)} = \left[\frac{40}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: $y = 0$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{5(7x-20)}{2(x+1)(x-4)} = 0$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

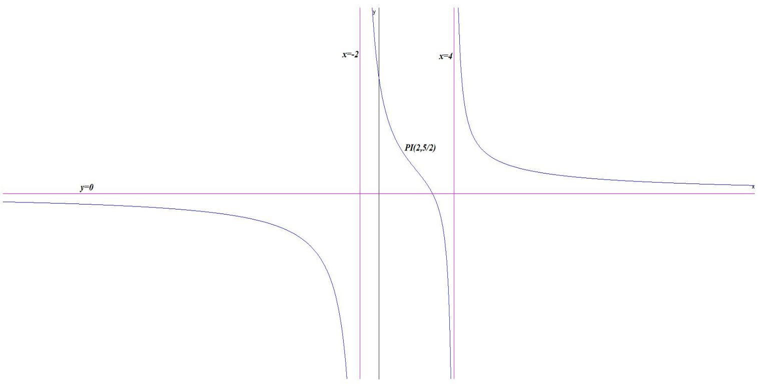
b) $f'(x) = -\dfrac{5(7x^2 - 40x + 88)}{2(x+1)^2(x-4)^2} < 0 \ \forall x \in R$. Luego f decrece en todo el dominio $R - \{-1, 4\}$.

$$f''(x) = \frac{5(7x^3 - 60x^2 + 264x - 344)}{(x+1)^3(x-4)^3} = 0 \Longrightarrow x = 2$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, 4)$	$(4, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa	Cóncava	Convexa	Cóncava

Hay un punto de inflexión en $(2, 5/2)$.

c) La gráfica es:



Problema 2 *(3 puntos)* Dadas la matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}; \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Calcular el determinante de A. Determinar el rango de A según los valores de a.

b) (0,5 puntos). Resolver el sistema homogéneo $AX = O$ en el caso $a = 1$.

c) (1 punto). Resolver el sistema homogéneo $AX = O$ cuando $a = -1$.

Solución:

a)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 - C_2 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & a & a \\ a-1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & a & a & 1 \end{vmatrix} =$$
$$-(a-1)\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & 1 \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 - C_3 \\ C_3 \end{bmatrix} = -(a-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 \\ a & a-1 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$(a-1)^2\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2(1-a^2) = -(a+1)(a-1)^3$$
$$-(a+1)(a-1)^3 = 0 \Longrightarrow a = -1, \ \ a = 1$$

Si $a = 1$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 1$$

Si $a = -1$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 4$.

b) Si $a = 1$ el Rango$(A) = 1$ y, como el sistema es homogéneo, el sistema es compatible indeterminado. Como el sistema tiene cuatro incógnitas se necesitan $4 - 1 = 3$ parámetros:
$$x + y + z + w = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = -\lambda - \mu - \sigma \\ y = \lambda \\ z = \mu \\ w = \sigma \end{cases}$$

c) Si $a = -1$ el Rango$(A) = 3$ y, como el sistema es homogéneo, el sistema es compatible indeterminado. Como el sistema tiene cuatro incógnitas se necesitan $4 - 3 = 1$ parámetro:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x+ & y- & z- & w= & 0\\ -x+ & y+ & z- & w= & 0\\ -x- & y- & z+ & w= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=\lambda\\ z=0\\ w=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 3 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(2;-2;1)$, $B(0;1;-2)$, $C(-2;0;-4)$, $D(2;-6;2)$, se pide:

se pide:

a) (1 punto) Probar que el cuatrilátero $ABCD$ es un trapecio (tiene dos lados paralelos) y hallar la distancia entre los dos lados paralelos.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo ABC.

Solución:

a) $\overrightarrow{AB}=(-2,3,-3)$, $\overrightarrow{BC}=(-2,-1,-2)$ y $\overrightarrow{CD}=(4,-6,6)=-2(-2,3,-3)$. Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son paralelos, luego se trata de un trapecio.

b) La distancia será la de A sobre el vector $\overrightarrow{CD}$. Construimos el vector $\overrightarrow{CA}=(4,-2,5)$:

$$S=|\overrightarrow{CD}\times\overrightarrow{CA}|=|\begin{vmatrix} i & j & k\\ 4 & -6 & 6\\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}|=|(-18,4,16)|=2\sqrt{149}\ u^2$$

$$|\overrightarrow{CD}|=2\sqrt{22}$$

$$S=|\overrightarrow{CD}|\cdot h\Longrightarrow h=\frac{2\sqrt{149}}{2\sqrt{22}}=\sqrt{\frac{149}{22}}$$

c) $\overrightarrow{AB}=(-2,3,-3)$ y $\overrightarrow{AC}=(-4,2,-5)$:

$$S_T=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=|\begin{vmatrix} i & j & k\\ -2 & 3 & -3\\ -4 & 2 & -5 \end{vmatrix}|=\frac{1}{2}|(-9,2,8)|=\frac{\sqrt{149}}{2}\ u^2$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dados el punto $P(1;2;-1)$ y el plano $\pi\equiv x+2y-2z+2=0$, sea S la esfera que es tangente al plano π en un punto P' de modo que el segmento PP' es uno de sus diámetros. Se pide:

a) (1 punto). Hallar el punto de tangencia P'.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de S.

Solución:

a) Calculamos una recta $r \perp \pi$ tal que $P \in r$:

$$r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,-2) \\ P_r = P(1,2,-1) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = 2+2\lambda \\ z = -1-2\lambda \end{array}\right.$$

El punto P' es el punto de corte de r con π:

$$1+\lambda+2(2+2\lambda)-2(-1-2\lambda)+2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow P'(0,0,1)$$

b) La esfera S tiene de centro el punto medio entre P y P', será $C(1/2,1,0)$ y su radio será la semidistancia de P a π:

$$r = \frac{d(P,\pi)}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{|1+4+2+2|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{9}{4}$$

$$x^2+y^2+z^2-x-2y-1 = 0$$

Examen de Matemáticas II (Septiembre 2013) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Sean r_A la recta con vector dirección $(1;\lambda;2)$ que pasa por el punto $A(1;2;1)$, r_B la recta con vector dirección $(1;1;1)$ que pasa por $B(1;-2;3)$, y r_C la recta con vector dirección $(1;1;-2)$ que pasa por $C(4;1;-3)$. Se pide:

a) (1 punto). Hallar λ para que las rectas r_A y r_B se corten.

b) (1,5 puntos). Hallar λ para que las rectas r_A sea paralela al plano definido por r_B y r_C.

c) (0,5 puntos). Hallar el ángulo que forman r_B y r_C.

Solución:

$$r_A: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_A}} = (1,\lambda,2) \\ P_{r_A} = A(1,2,1) \end{array}\right., \quad r_B: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_B}} = (1,1,1) \\ P_{r_B} = B(1,-2,3) \end{array}\right. \quad r_C: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_C}} = (1,1,-2) \\ P_{r_C} = C(4,1,-3) \end{array}\right.$$

a) Utilizamos el vector auxiliar $\overrightarrow{AB} = (0,-4,2)$:

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc} 0 & -4 & 2 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = -2-2\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$$

Para que las rectas r_A y r_B se corte es necesario que Rango$(A) = 2 \Longrightarrow \lambda = -1$. En este caso puede ser también que las rectas sean paralelas, para eliminar esta posibilidad se estudia:

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} \overrightarrow{u_{r_A}} \\ \overrightarrow{u_{r_B}} \end{pmatrix} = 2, \text{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow r_A \text{ y } r_B \text{ se cortan}$$

b) Plano definido por r_B y r_C:

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_B}} = (1,1,1) \\ \overrightarrow{u_{r_C}} = (1,1,-2) \\ B(1,-2,3) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ 1 & 1 & y+2 \\ 1 & -2 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : x-y-3 = 0$$

$$\overrightarrow{\pi} = (1,-1,0) \perp \overrightarrow{u_{r_A}} \Longrightarrow \overrightarrow{\pi} \cdot \overrightarrow{u_{r_A}} = 0$$

$$(1,-1,0)\cdot(1,\lambda,2) = 1-\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$$

c)

$$\cos\alpha \frac{u_{r_B}\cdot u_{r_C}}{|u_{r_B}||u_{r_C}|} = \frac{1+1-2}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x+ & \lambda y+ & \lambda z = & 1-\lambda \\ x+ & y+ & (\lambda-1)z = & -2\lambda \\ (\lambda-1)x+ & y+ & z = & \lambda-1 \end{cases}$$

Se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro λ.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $\lambda = 1$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $\lambda = -1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda & 1-\lambda \\ 1 & 1 & \lambda-1 & -2\lambda \\ \lambda-1 & 1 & 1 & \lambda-1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

Si $\lambda = 2$:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso el Rango$(A) = 1$ y el Rango$(\overline{A}) = 2$ y el sistema es incompatible.

Si $\lambda = -1$:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

En este caso: $F_1 = -F_3 \Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $\lambda = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x+ & y+ & z = & 0 \\ x+ & y & = & -2 \\ & y+ & z = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{array} \right.$$

c) Si $\lambda = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x- & y- & z = & 2 \\ x+ & y- & 2z = & -2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \mu \\ y = -2 + \mu \\ z = \mu \end{array} \right.$$

Problema 3 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$.

b) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx$.

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0, \ \ m = f'(0) = 1; \ \ f(0) = 0 \Longrightarrow y = x$$

b)

$$\int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)\,dx = x - \arctan x]_0^1 =$$

$$1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4-\pi}{4}$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = e^{1/x}$, se pide:

a) (1 punto). Calcular $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$ y estudiar la existencia de $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} f(x)$.

b) (1 punto). Esbozar la gráfica $y = f(x)$ determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus asíntotas.

Solución:

a) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} e^{1/x} = 1$; $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} e^{1/x} = 1$.

$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$; $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} e^{1/x} = \infty$; luego en 0 no extiste el límite.

b) Por el apartado anterior la función tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y una asíntota horizontal en $y = 1$.

$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2} < 0, \ \forall x \in R - \{0\}$$

Luego la función es siempre decreciente.