

Examen de Matemáticas II (Modelo 2013)
Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (3 puntos) Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 3x}{x - 1} & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

se pide:

- a) (1 punto). Determinar el valor de a para que f sea continua en $x = 0$.
- b) (1 punto). Para ese valor de a , estudiar la derivabilidad de f en $x = 0$.
- c) (1 punto). Hallar, si las tiene, las asíntotas de la gráfica $y = f(x)$.

Solución:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + 3x}{x - 1} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x} = 0; \quad f(0) = a$$

Luego $a = 0$.

b)

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 4x - 3}{(x - 1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x^2} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = 3; \quad f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/h}}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1/h}{e^{1/h}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-1/h^2}{-1/h^2 e^{1/h}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{1/h}} = 0$$

Como $f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.

c) Si $x < 0$:

- Verticales: La única posible sería en $x = 1$, pero no está en la rama y, por tanto no es válida.
- Horizontales: No tiene

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x}{x - 1} = -\infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x}{x^2 - x} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + 3x}{x - 1} - 2x \right) =$$

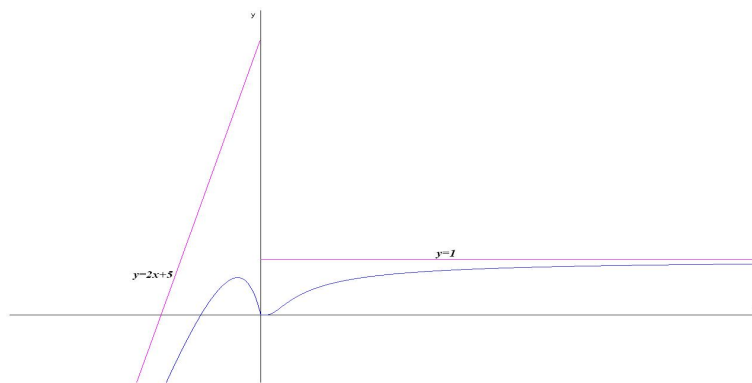
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x}{x - 1} \right) = 5 \implies y = 2x + 5$$

Si $x > 0$:

- Verticales: No puede haberlas.
- Horizontales: $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-1/x} = e^0 = 1$$

- Oblicuas: No hay por haber horizontales.



Problema 2 (3 puntos) Dado el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + (m+3)z = 3 \\ x + y + (4+m-m^2)z = 3 \\ 2x + 4y + 3(m+2)z = 8 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutir el sistema según los valores de m .

b) (1 punto) Resolverlo para $m = -2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & m+3 & 3 \\ 1 & 1 & 4+m-m^2 & 3 \\ 2 & 4 & 3(m+2) & 8 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = -m = 0 \Rightarrow m = 0$$

Si $m \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema compatible determinado.}$

Si $m = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{array} \right) \Rightarrow |A| = 0, \left| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right| = -1 \neq 0 \Rightarrow$$

$\text{Rango}(A) = 2$.

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 8 \end{array} \right| = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \Rightarrow$ el sistema es incompatible.

b) Para $m = -2$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x+ & 2y+ & z = 3 \\ x+ & y- & 2z = 3 \\ 2x+ & 4y+ & = 8 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

Problema 3 (2 puntos)

a) (1 punto). Hallar el punto de corte entre el plano $\pi_1 \equiv 6x - y + 3z = -2$ y la recta r que pasa por el punto $P(1; 2; 0)$ y es perpendicular al plano $\pi_2 \equiv 2x + 3y - z = 8$.

b) (1 punto). Hallar el punto común a los tres planos $\pi_3; \pi_4; \pi_5$ siguientes:

$$\pi_3 \equiv 5x + 2y + 7z = 4; \quad \pi_4 \equiv x + 2y - 3z = 10$$

y π_5 el plano definido por las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+3}{3} = z+3; \quad r_2 \equiv x+2 = y = \frac{z+7}{2}$$

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_\pi = (2, 3, -1) \\ P_r(1, 2, 0) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

$$6x - y + 3z = -2 \implies 6(1 + 2\lambda) - (2 + 3\lambda) + 3(-\lambda) = -2 \implies \lambda = -1 \implies P'(-1, -1, 1)$$

b)

$$\pi_5 : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x+2 \\ 3 & 1 & y \\ 1 & 2 & z+7 \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_5 : 5x - 3y - z = -3$$

$$P : \begin{cases} 5x + 2y + 7z = 4 \\ x + 2y - 3z = 10 \\ 5x - 3y - z = -3 \end{cases} \implies P(1, 3, -1)$$

Problema 4 (2 puntos) Dados el plano $\pi \equiv x - y + 2z = 1$ y la recta

$$r \equiv \frac{x}{-6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$$

se pide:

a) (1 punto). Determinar la posición relativa entre el plano π y la recta r .

b) (1 punto). Determinar el plano que contenga a r y pase por $P(1; 1; 1)$.

Solución:

a)

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (-6, 1, 2) \\ P_r(0, -1, 0) \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = -6\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

$$x - y + 2z = 1 \implies (-6\lambda) - (-1 + \lambda) + 2(2\lambda) = 1 \implies \lambda = 0 \implies \text{se cortan } P'(0, -1, 0)$$

b)

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (-6, 1, 2) \\ \vec{P_r P} = (1, 2, 1) \\ P(111) \end{cases} \implies \pi : \begin{vmatrix} -6 & 1 & x \\ 1 & 2 & y+1 \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \pi_1 : 3x - 8y + 13z = 8$$

Examen de Matemáticas II (Modelo 2013)
Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (3 puntos)

- a) (1 punto). Hallar, si existe, el punto de corte de las rectas

$$r_1 : \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases} ; \quad r_2 : \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

- b) (1 punto). Determinar el valor de a para que los planos

$$\begin{array}{ll} \pi_1 : x + 2y + z = 3 & \pi_2 : 2x + 3y - z = 5 \\ \pi_3 : 2x + 2y + 4z = 3 & \pi_4 : x + 3y = a \end{array}$$

tengan un único punto en común.

- c) (1 punto). Hallar la recta paralela a los planos

$$\pi_5 : 2x + 5y - z = 2; \quad \pi_6 : 6x - y + z = 8$$

que pasa por el punto $P(1; 5; -3)$.

Solución:

- a)

$$r_1 : \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = \mu \\ z = 1 - 2\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + \mu = -1 + 2\lambda \\ \mu = 2 + \lambda \\ 1 - 2\mu = -\lambda \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda = 5 \\ \mu = 7 \\ 1 - 2\mu = -\lambda \end{cases} \implies 1 - 2(7) \neq -5 \implies \text{se cruzan}$$

Otra forma:

$$r_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1, 1, -2) \\ P_{r_1}(2, 0, 1) \end{cases}, \quad r_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_2}} = (2, 1, -1) \\ P_{r_2}(-1, 2, 0) \end{cases}; \quad \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (-3, 2, -1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \implies r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan}$$

b)

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x+3y+z=5 \\ 2x+2y+4z=3 \\ x+3y=a \end{cases} \Rightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & a \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & a \end{vmatrix} = 36 - 8a = 0 \Rightarrow a = \frac{9}{2}$$

Si $a = 9/2 \Rightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = n^o$ de incógnitas y el sistema tiene solución única. Se trata de un sistema compatible determinado. Por tanto, en $a = 9/2$ los cuatro planos se cortan en un punto.

c)

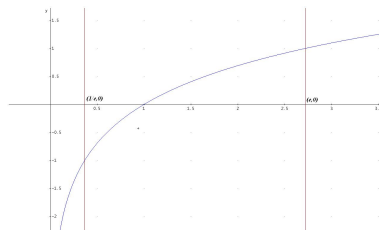
$$\vec{u}_t = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 5 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4(1, -2, -8) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = -3 - 8\lambda \end{cases}$$

Problema 2 (3 puntos)

- (0,5 puntos). Representar gráficamente el recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \ln x$ y el eje OX entre las abscisas $x = 1/e$, $x = e$.
- (1,25 puntos). Calcular el área de dicho recinto.
- (1,25 puntos). Calcular el volumen del sólido de revolución obtenido al girar dicho recinto alrededor del eje OX .

Solución:

- $f(1/e) = -1$, $f(e) = 1$ y $f(1) = 0$:

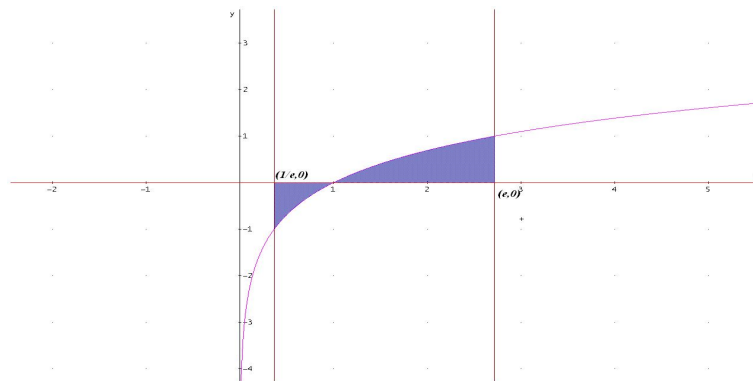


b)

$$F(x) = \int \ln x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \implies v = x \end{array} \right] = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1)$$

$$S_1 = F(1) - F(1/e) = \frac{2-e}{e}; \quad S_2 = F(e) - F(1) = 1$$

$$\text{Área} = |S_1| + |S_2| = \left| \frac{2-e}{e} \right| + 1 = \frac{e-2}{e} + 1 = \frac{2(e-1)}{e} u^2$$



c)

$$F(x) = \int (\ln x)^2 \, dx = \left[\begin{array}{l} u = (\ln x)^2 \implies du = \frac{2 \ln x}{x} dx \\ dv = dx \implies v = x \end{array} \right] =$$

$$x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x \, dx = x(\ln x)^2 - 2x(\ln x - 1)$$

$$V = \pi \int_{1/e}^e (\ln x)^2 \, dx = \pi(F(e) - F(1/e)) = \frac{\pi(e^2 - 5)}{e} u^3$$

Problema 3 (2 puntos)

- a) (1 punto). Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ obtener las relaciones que deben cumplir x, y, z, t para que la matriz X verifique $AX = XA$.
- b) (0,5 puntos). Dar un ejemplo de matriz X distinta de la matriz nula y de la matriz identidad que cumpla la igualdad anterior.
- c) (0,5 puntos). Calcular la inversa de la matriz A .

Solución:

a)

$$\begin{aligned}
 AX = XA &\implies \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \implies \\
 &\begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 2x+z & 2y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y & 2x+y \\ z+2t & 2z+t \end{pmatrix} \implies \\
 &\begin{cases} x+2z = x+2y \implies z = y \\ y+2t = 2x+y \implies t = x \\ 2x+z = z+2t \implies t = x \\ 2y+t = 2z+t \implies z = y \end{cases} \implies X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

b) $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$

Problema 4 (2 puntos) De las matrices cuadradas A y B se sabe que:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^2 - AB + BA - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto). Calcular la matriz $A - B$.

b) (1 punto). Calcular las matrices A y B .

Solución:

a)

$$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$A - B = (A + B)^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \implies$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Criterios específicos de corrección

OPCIÓN A

Ejercicio 1.- a) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos. b) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos. c) Por cada asíntota 0,5 puntos, repartidos en: Planteamiento, 0,25 puntos. Resolución, 0,25 puntos.

Ejercicio 2.- a) Por la obtención del valor crítico $m = 0$, 0,5 puntos repartidos en: Planteamiento, 0,25 puntos. Resolución, 0,25 puntos. Por la discusión de cada uno de los dos casos ($m = 0$) y ($m \neq 0$), 0,75 puntos por caso, repartidos en: Planteamiento, 0,25 puntos. Resolución, 0,5 puntos. b) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.

Ejercicio 3.- a) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos. b) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.

Ejercicio 4.- a) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos. b) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- a) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos. b) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos. c) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.

Ejercicio 2.- a) Resolución, 0,5 puntos. b) Planteamien-

to, 0,5 puntos. Resolución, 0,75 puntos. c) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,75 puntos.

Ejercicio 3.- a) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos. b) Planteamiento, 0,25 puntos. Resolución, 0,25 puntos. c) Planteamiento, 0,25 puntos. Resolución, 0,25 puntos.

Ejercicio 4.- a) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos. b) Planteamiento, 0,5 puntos. Resolución, 0,5 puntos.