Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Septiembre 2012) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

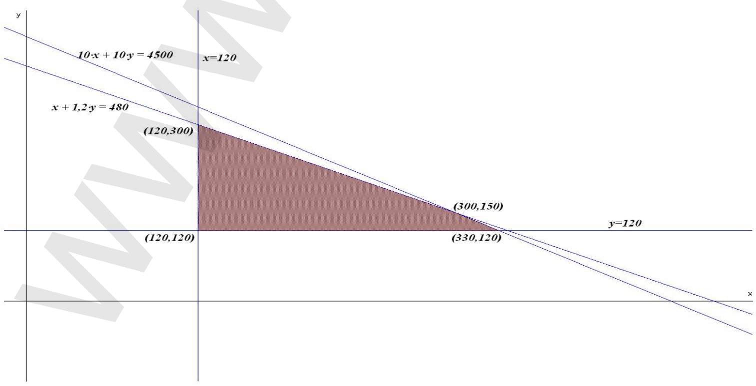
Problema 1 *(3 puntos)* Un pintor dispone de dos tipos de pintura para realizar su trabajo. El primer tipo de pintura tiene un rendimiento de 3 m^2 por litro, con un coste de 1 euro por litro. El segundo tipo de pintura tiene un rendimiento de 4 m^2 por litro, con un coste de 1,2 euros por litro. Con ambos tipos de pintura se puede pintar a un ritmo de 1 litro cada 10 minutos. El pintor dispone de un presupuesto de 480 euros y no puede pintar durante más de 75 horas. Además, debe utilizar al menos 120 litros de cada tipo de pintura. Determínese la cantidad de pintura que debe utilizar de cada tipo si su objetivo es pintar la máxima superficie posible. Indíquese cuál es esa superficie máxima.

Solución:

LLamamos x al nº de litros de pintura del primer tipo e y al nº de litros de pintura del segundo tipo.

Función objetivo: $z(x,y) = 3x + 4y$ sujeta a:

$$\begin{cases} x + 1,2y \le 480 \\ 10x + 10y \le 4500 \\ x, y \ge 120 \end{cases}$$



$$\begin{cases} z(120,120) = 840 \\ z(120,300) = 1560 \\ z(300,150) = 1500 \\ z(330,120) = 1470 \end{cases}$$

La cantidad óptima a utilizar sería: 120 litros de pintura del primer tipo y 300 de pintura del segundo tipo 2. Podrían pintarse 1560 m^2.

Problema 2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{x(2x-1)}{x-1}$.

1. Determínense las asíntotas de f . Calcúlense los extremos relativos de f .
2. Represéntese gráficamente la función f.
3. Calcúlese $\displaystyle\int_2^5 \frac{f(x)}{x^2}\, dx$.

Solución:

1. Asíntotas:

   - Verticales: $x = 1$

   $$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x(2x-1)}{x-1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

   $$\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x(2x-1)}{x-1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

   - Horizontales: No hay

   $$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x(2x-1)}{x-1} = \infty$$

   - Oblicuas: $y = mx + n$

   $$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x(2x-1)}{x^2-x} = 2$$

   $$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{x(2x-1)}{x-1} - 2x\right) = 1$$

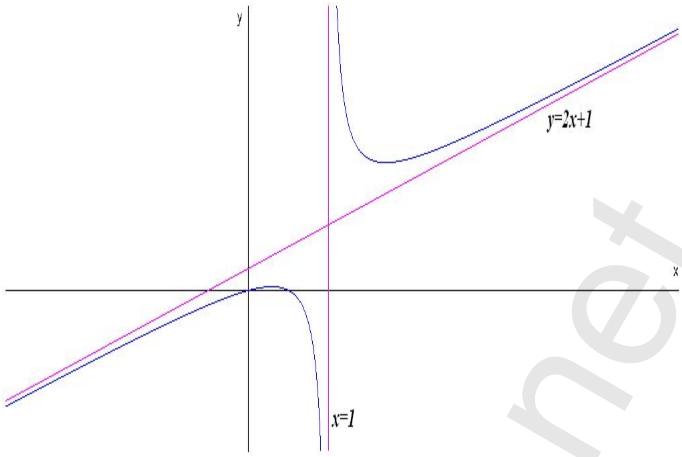
   $$y = 2x + 1$$

   Extremos:

   $$f'(x) = \frac{2x^2-4x+1}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x_1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2},\ \ x_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

   $$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \Longrightarrow \begin{cases} f''(x_1) > 0 \Longrightarrow \text{en } x_1 \text{ hay un mínimo} \\ f''(x_2) < 0 \Longrightarrow \text{en } x_1 \text{ hay un máximo} \end{cases}$$

2.



3. $\displaystyle\int_2^5 \frac{f(x)}{x^2}\,dx = \int_2^5 \frac{2x-1}{x^2-x}\,dx = \ln|x^2-x|\Big]_2^5 = \ln 10.$

Problema 3 *(2 puntos)* Se dispone de cinco cajas opacas. Una contiene una bola blanca, dos contienen una bola negra y las otras dos están vacías. Un juego consiste en ir seleccionando al azar y secuencialmente una caja no seleccionada préviamente hasta obtener una que contenga una bola. Si la bola de la caja seleccionada es blanca, el jugador gana; si es negra, el jugador pierde.

1. Calcúlese la probabilidad de que el jugador gane.
2. Si el jugador ha perdido, ¿cuál es la probabilidad de que haya seleccionado una sola caja?

Solución:

Para que un jugador gane pueden ocurrir los siguientes sucesos: B, NB y NNB.

1. $$P(Ganar) = P(B) + P(NB) + P(NNB) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\frac{1}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

2. $$P(una\ caja|Perder) = \frac{P(Perder \cap una\ caja)}{P(Perder)} = \frac{2/5}{2/3} = \frac{3}{5}$$

Problema 4 *(2 puntos)* La duración en kilómetros de los neumáticos de una cierta marca se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica igual a 3000 kilómetros.

1. Se toma una muestra aleatoria simple de 100 neumáticos y se obtiene una media muestral de 48000 kilómetros. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para μ.

2. Calcúlese el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestra y μ sea menor o igual a 1000 kilómetros con probabilidad mayor o igual que 0,95.

Solución:

1. Tenemos $n = 100$, $\overline{X} = 48000$, $\sigma = 3000$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (47506{,}5; 48493{,}5)$$

2. Tenemos $E = 1000$, $\sigma = 3000$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 34{,}577$$

Luego $n = 35$.

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Septiembre 2012) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & z = & 2 \\ x+ & ky+ & 2z = & 5 \\ kx+ & y+ & z = & 1 \end{array}\right.$$

1. Discútase el sistema según los diferentes valores de k.
2. Resuélvase el sistema para $k = 0$.
3. Resuélvase el sistema para $k = 2$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & k & 2 & 5 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = -k^2 + 3k - 2 = 0 \Longrightarrow k = 1, \;\; k = 2$$

- Si $k \neq 1$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ n^o de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).
- Si $k = 1$:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right); \;\; |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

  $$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

  Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)
- Si $k = 2$:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right); \;\; |A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow$$

  Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ n^o de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (Infinitas soluciones)

2. $k=0$

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=2\\ x+2z=5\\ y+z=1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=-1\\ z=2 \end{array}\right.$$

3. $k=2$

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=2\\ x+2y+2z=5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1\\ y=3-\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{rcl} ax+b & \text{si} & x\le 1\\ x^3-x^2+1 & \text{si} & x>1 \end{array}\right.$$

1. Calcúlense los valores de a y b para los que la función f es continua y derivable.
2. Para $a=0$ y $b=1$, hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en los puntos en los que dicha tangente es paralela a la recta $y-8x=1$.
3. Sea g la función real de variable real definida por $g(x)=1-2x^2$. Para $a=1$ y $b=0$, calcúlese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de f y la gráfica de g.

Solución:

1. f continua en $x=1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1^-}(ax+b)=a+b$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1^-}(x^3-x^2+1)=1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1^+} \Longrightarrow a+b=1$$

f no es derivable en $x=1$:

$$f'(x)=\left\{\begin{array}{rcl} a & \text{si} & x\le 1\\ 3x^2-2x & \text{si} & x>1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(1^-)=a\\ f'(1^+)=1 \end{array}\right. \Longrightarrow a=1$$

Luego $a=1$ y $b=0$.

2. $y - 8x = 1 \Longrightarrow y = 8x - 1 \Longrightarrow m = 8$

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{rcl} 1 & \text{si} & x \le 1 \\ 3x^2 - 2x & \text{si} & x > 1 \end{array} \right.$$

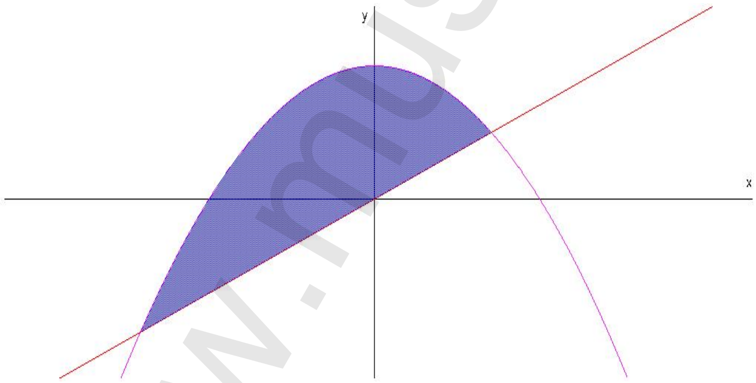
Las soluciones estarán cuando $x > 1 \Longrightarrow 3x^2 - 2x = 8 \Longrightarrow x = 2$ y $x = -4/3$, esta última solución no es válida, y el punto de tangencia es $(2, f(2)) = (2, 5)$. La ecuación de la recta tangente a la función f es $y - 5 = 8(x - 2)$.

3.

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccl} x & \text{si} & x \le 1 \\ x^3 - x^2 + 1 & \text{si} & x > 1 \end{array} \right.$$

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ccl} x = 1 - 2x^2 & \text{si} & x \le 1 \\ x^3 - x^2 + 1 = 1 - 2x^2 & \text{si} & x > 1 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{ccl} 2x^2 + x - 1 = 0 & \text{si} & x \le 1 \\ x^3 + x^2 = 0 & \text{si} & x > 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ccl} x = -1, \ x = 1/2 & \text{si} & x \le 1 \\ x = 0, \ x = -1 & \text{si} & x > 1 \text{ No valen} \end{array} \right.$$



4.

$$S = \int_{-1}^{1/2} (-2x^2 - x + 1)dx)\, dx = -\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \Big]_{-1}^{1/2} = \frac{9}{8}\ u^2$$

Problema 3 *(2 puntos)* Se consideran dos sucesos A y B tales que:

$$P(A) = \frac{1}{3} \quad P(B|A) = \frac{1}{4} \quad P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

Calcúlese razonadamente:

1. $P(A \cap B)$.

2. $P(B)$.

3. $P(\overline{B}|A)$.

4. $P(\overline{A}|\overline{B})$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S. $P(S|T)$ denota la probabilidad del suceso S condicionada al suceso T.

Solución:

1. $$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

2. $$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow P(B) = \frac{1}{4}$$

3. $$P(\overline{B}|A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3}{4}$$

4. $$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{2}{3}$$

Problema 4 *(2 puntos)* El tiempo de espera para ser atendido en un cierto establecimiento se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación tipica igual a 3 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de tamano 121.

1. Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media de la muestra y μ sea mayor que 0,5 minutos.

2. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ, si la media de la muestra es igual a 7 minutos.

Solución:

1. $$P(|\overline{X} - \mu| \geq 5) = P(|Z| \geq \frac{5}{3/11}) = 2(1 - P(Z \leq 1{,}83)) = 0{,}0672$$

2. $N(\mu, 3)$, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}5345454545 IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (6{,}465; 7{,}535)$$

Criterios específicos de corrección
ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos.
OPCIÓN A
Ejercicio 1.-(Puntuación máxima: 3 puntos).
Obtención de la función objetivo 0,25 puntos.
Obtención de las restricciones 1,00 punto.
Determinación correcta de los vértices de la región factible 1,00 punto.
Localización del máximo 0,50 puntos.
Obtención del valor máximo 0,25 puntos.

Ejercicio 3.- (Puntuación máxima: 3 puntos).
Apartado (a)
Obtención de la asíntota vertical 0,25 puntos.
Obtención de la asíntota oblícua 0,25 puntos.
Obtención de los extremos 0,25 puntos.
Comprobación del tipo de punto extremo (mínimo/máximo) 0,25 puntos.
Total Apartado (a) 1,00 punto.
Apartado (b) Representación correcta de la función 1,00 punto.
Apartado (c) Cálculo correcto de la primitiva 0,75 puntos
Cálculo correcto de la integral definida 0,25 puntos.
Total Apartado (c) 1,00 punto.

Ejercicio 3.- (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a)
Planteamiento correcto 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida 0,50 puntos.
Total apartado (a) 1,00 punto.
Apartado (b)
Planteamiento correcto 0,50 puntos.

Cálculo correcto de la probabilidad pedida 0,50 puntos.
Total apartado (b) 1,00 punto.

Ejercicio 4.- . (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado(a)
Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ 0,25 puntos.
Expresión correcta de la fórmula del intervalo de confianza 0,25 puntos.
Cálculo correcto del intervalo de confianza 0,50 puntos.
Total apartado (a) 1,00 punto.
Apartado (b)
Planteamiento correcto 0,50 puntos.
Obtención correcta del valor mínimo del tamano muestral 0,50 puntos.
Total apartado (b) 1,00 punto.

OPCIÓN B
Ejercicio 1.- (Puntuación máxima: 3 puntos).
Apartado (a)
Obtención de los valores críticos ($k = 1, 2$) 0,75 puntos.
Discusión del sistema por caso 0,25 $3x0, 25)$ 0,75 puntos.
Total Apartado (a) 1,50 puntos.
Apartado (b)
Planteamiento del sistema de ecuaciones 0,25 puntos.
Resolución del sistema 0,50 puntos.
Total Apartado (b) 0,75 puntos.
Apartado (c)
Planteamiento del sistema de ecuaciones 0,25 puntos.
Resolución del sistema 0,50 puntos.
Total Apartado (c) 0,75 puntos.

Ejercicio 2.- (Puntuación máxima: 3 puntos).
Apartado (a)

Estudio correcto de la continuidad y de la derivabilidad 0,50 puntos.
Cálculo correcto de a y b 0,50 puntos
Total Apartado (a) 1,00 punto.
Apartado (b)
Fórmula correcta de la ecuación de la recta tangente 0,50 puntos.
Obtención correcta de los parámetros de la recta tangente 0,50 puntos.
Total Apartado (b) 1,00 punto.
Apartado (c)
Planteamiento correcto de la integral definida 0,50 puntos.
Obtención del área 0,50 puntos.
Total Apartado (c) 1,00 punto.

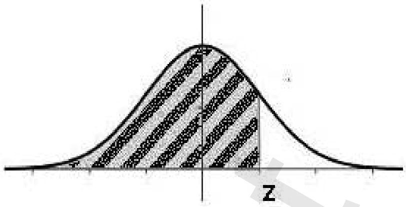
Ejercicio 3.- (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a)
Planteamiento correcto 0,25 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida 0,25 puntos.
Total apartado (a) 0,50 puntos.
Apartado (b)
Planteamiento correcto 0,25 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida 0,25 puntos.
Total apartado (b) 0,50 puntos.
Apartado (c)
Planteamiento correcto 0,25 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida 0,25 puntos.
Total apartado (c) 0,50 puntos.
Apartado (d)
Planteamiento correcto 0,25 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida 0,25 puntos.
Total apartado (d) 0,50 puntos.

Ejercicio 4.- (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a)
Planteamiento correcto 0,50 puntos.
Obtención correcta de la probabilidad pedida 0,50 puntos.
Total apartado (a) 1,00 punto.
Apartado (b)
Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ 0,25 puntos.
Expresión correcta de la fórmula del intervalo de confianza 0,25 puntos.
Obtención correcta del intervalo de confianza 0,50 puntos.
Total apartado (b) 1,00 punto.

NOTA:
La resolución de ejercicios por cualquier procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7652
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8930
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9561	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9934	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9901	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990