Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2012) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a :

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & ay- & 7z = & 4a-1 \\ x+ & (1+a)y- & (a+6)z = & 3a+1 \\ & ay- & 6z = & 3a-2 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.

b) Resuélvase el sistema en el caso en el que tiene infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema en el caso a = -3.

Solución:

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -7 & 4a-1 \\ 1 & 1+a & -(a+6) & 3a+1 \\ 0 & a & -6 & 3a-2 \end{array}\right); \ |A| = a^2 - a - 6 = 0 \Longrightarrow a = 3, \ a = -2$$

- Si $a \neq 3$ y $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).
- Si $a = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -7 & 11 \\ 1 & 4 & -9 & 10 \\ 0 & 3 & -6 & 7 \end{array}\right); \ |A| = 0 \ \text{y} \ \left|\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 10 \\ 0 & 3 & 7 \end{array}\right| = 10 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como los rangos son distintos el sistema es incompatible (No tiene solución)

- Si $a = -2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -7 & -9 \\ 1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & -2 & -6 & -8 \end{array}\right); \ |A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 0 \ \text{y} \ \left|\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{array}\right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado (Infinitas soluciones) b)

$$\left\{\begin{array}{r} x-y-4z=-5 \\ 2y-6z=-8 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1+\lambda \\ y=4-3\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

c) $a=-3$

$$\left\{\begin{array}{r} x-3y-7z=-13 \\ x-2y-3z=-8 \\ -3y-6z=-11 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-4/3 \\ y=7/3 \\ z=2/3 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Una empresa vinícola tiene plantadas 1200 cepas de vid en una finca, produciendo cada cepa una media de 16 kg de uva. Existe un estudio previo que garantiza que por cada cepa que se añade a la finca, las cepas producen de media 0,01 kg menos de uva cada una. Determínese el número de cepas que se deben añadir a las existentes para que la producción de uvas de la finca sea máxima.

Solución:

x: Nº de copas que debemos añadir. La producción vedrá dada por la siguiente función:

$$f(x)=(16-0,01x)(1200+x)=-0,01x^2+4x+19200$$

$$f'(x)=-0,02x+4=0 \Longrightarrow x=200$$

$$f''(x)=-0,02 \Longrightarrow f''(200)<0 \Longrightarrow \text{en } x=200 \text{ hay un máximo}$$

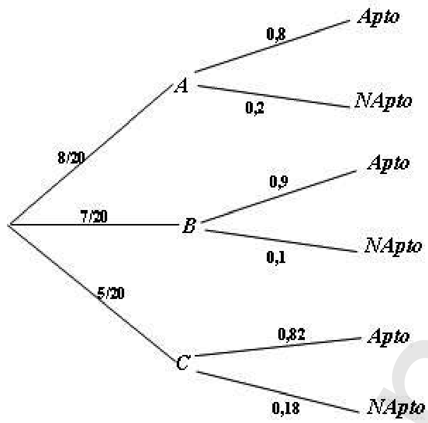
Luego hay que añadir 200 cepas.

Problema 3 *(2 puntos)* En un tribunal de la prueba de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado se han examinado 80 alumnos del colegio A, 70 alumnos del colegio B y 50 alumnos del colegio C. La prueba ha sido superada por el 80 % de los alumnos del colegio A, el 90 % de los del colegio B y por el 82 % de los del colegio C.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya superado la prueba?

b) Un alumno elegido al azar no ha superado la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al colegio B?

Solución:



a)
$$P(Apto) = \frac{8}{50} \cdot 0,8 + \frac{7}{20} \cdot 0,9 + \frac{5}{20} \cdot 0,82 = 0,84$$

b) $P(NApto) = 1 - P(Apto) = 0,16$
$$P(B|NApto) = \frac{P(NApto|B)P(B)}{P(NApto)} = \frac{7}{32} = 0,21875$$

Problema 4 *(2 puntos)* Se supone que el peso en kilogramos de los alumnos de un colegio de Educación Primaria el primer día del curso se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 2,8 kg. Una muestra aleatoria simple de 8 alumnos de ese colegio proporciona los siguientes resultados (en kg):

$$26 \quad 27,5 \quad 31 \quad 28 \quad 25,5 \quad 30,5 \quad 32 \quad 31,5.$$

a) Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 90 % para el peso medio de los alumnos de ese colegio el primer día de curso.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor o igual que 0,9 kg con un nivel de confianza del 97 %.

Solución:

a) Tenemos $n = 8$, $\overline{X} = 29$, $\sigma = 2,8$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}645$
$$IC = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (27{,}372; 30{,}628)$$

b) Tenemos $E = 0{,}9$, $\sigma = 20$ y $z_{\alpha/2} = 2{,}17$
$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 45{,}577$$

Luego $n = 46$.

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2012) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Un estadio de fútbol con capacidad para 72000 espectadores está lleno durante la celebración de un partido entre los equipos A y B. Unos espectadores son socios del equipo A, otros lo son del equipo B, y el resto no son socios de ninguno de los equipos que están jugando. A través de la venta de localidades sabemos lo siguiente:

a) No hay espectadores que sean socios de ambos equipos simultáneamente.

b) Por cada 13 socios de alguno de los dos equipos hay 3 espectadores que no son socios.

c) Los socios del equipo B superan en 6500 a los socios del equipo A.

¿Cuántos socios de cada equipo hay en el estadio viendo el partido?

Solución:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=72000 \\ \dfrac{x+y}{13}=\dfrac{z}{3} \\ x+6500=y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=72000 \\ 3x+3y-13z=0 \\ x-y=-6500 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=26000 \\ y=32500 \\ z=13500 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{rcl} x^2-4x+3 & \text{si} & x\le 1 \\ -x^2+4x-3 & \text{si} & x>1 \end{array}\right.$$

a) Estúdiese la continuidad y la derivabilidad de la función f.

b) Represéntese gráficamente la función f.

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, el eje OX, el eje OY, y la recta $x=2$.

Solución:

a) f continua en $x=1$:

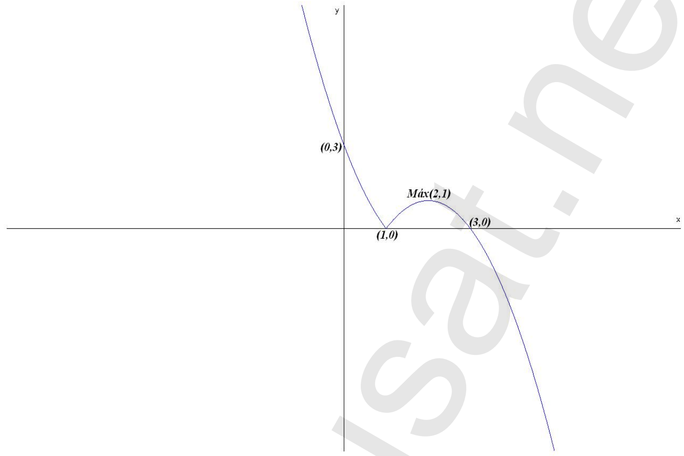
$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x)=f(0)=0$$

f no es derivable en $x = 1$:

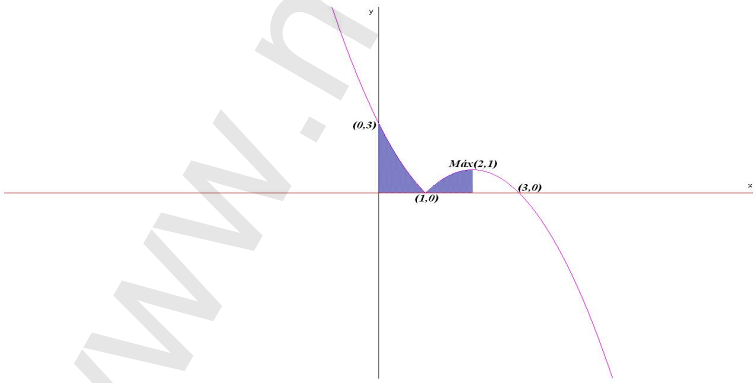
$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 4 & \text{si} & x \le 1 \\ -2x + 4 & \text{si} & x > 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(1^-) = -2 \\ f'(1^+) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow f'(1^-) \ne f'(1^+)$$

Luego f no es derivable en $x = 1$.

b) Representación:



c)



d)

$$S_1 = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\, dx = \left. \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$S_2 = \int_1^2 (-x^2 + 4x - 3)\, dx = \left. -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]_1^2 = \frac{2}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2\ u^2$$

Problema 3 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A \cap B) = 0,1 \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,6 \quad P(A|B) = 0,5$$

Calcúlense:

a) $P(B)$.

b) $P(A \cup B)$.

c) $P(A)$.

d) $P(\overline{B}|\overline{A})$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S. $P(S|T)$ denota la probabilidad del suceso S condicionada al suceso T.

Solución:

a)
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$$

b)
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0,6$$
$$P(A \cup B) = 0,4$$

c)
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Longrightarrow$$
$$P(A) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(B) = 0,4 + 0,1 - 0,2 = 0,3$$

d)
$$P(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0,6}{0,7} = 0,86$$

Problema 4 *(2 puntos)* Se supone que el gasto que hacen los individuos de una determinada población en regalos de Navidad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 45 euros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene el intervalo de confianza (251,6 ; 271,2) para μ, con un nivel de confianza del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 64 para estimar μ. Calcúlese el error máximo cometido por esa estimación con un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

a) $N(\mu, 45)$, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$:

$$IC = (251{,}6; 271{,}2) = (\overline{X}-E, \overline{X}+E) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{X} - E = 251{,}6 \\ \overline{X} + E = 271{,}2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{X} = 261{,}4 \\ E = 9{,}8 \end{array} \right.$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 81$$

b) $n = 64$, $z_{\alpha/2} = 1{,}645$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 9{,}253$$

Criterios específicos de corrección
ATENCIÓN: La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos.
OPCIÓN A
Ejercicio 1.-(Puntuación máxima: 3 puntos).
Apartado (a) Obtención de los valores críticos 0,75 puntos.
Discusión del sistema para cada caso $(3 \times 0,25) = 0,75$ puntos.
Total apartado (a) 1,50 puntos.
Apartado (b) Planteamiento del sistema de 2 ecuaciones 0,25 puntos Resolución del sistema 0,50 puntos.
Total apartado (b) 0,75 puntos.
Apartado (c) Planteamiento del sistema de ecuaciones 0,25 puntos.
Resolución del sistema 0,50 puntos.
Total apartado (c) 0,75 puntos.
Ejercicio 2.- (Puntuación máxima: 3 puntos).
Expresión correcta de la función que se debe optimizar 1,50 puntos.
Obtención del n° de cepas que optimizan el problema 1,50 puntos.

Ejercicio 3.- (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a) Planteamiento correcto 0,50 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida 0,50 puntos. Total apartado (a) 1,00 punto.
Apartado (b) Planteamiento correcto 0,50 puntos. Cálculo correcto de la probabilidad pedida 0,50 puntos. Total apartado (b) 1,00 punto.
Ejercicio 4.- . (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado(a) Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ 0,25 puntos.
Expresión correcta de la fórmula del intervalo de confianza 0,25 puntos.

Obtención correcta del intervalo de confianza 0,50 puntos.
Total apartado (a) 1 punto.
Apartado (b) Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ 0,25 puntos.
Planteamiento correcto 0,25 puntos.
Cálculo correcto del tamaño muestral 0,50 puntos. Total apartado (b) 1 punto.

OPCIÓN B

Ejercicio 1.- (Puntuación máxima: 3 puntos).
Definición correcta y adecuada de las incógnitas 0,50 puntos.
Planteamiento correcto del sistema de ecuaciones 1,50 puntos.
Resolución correcta del problema 1,00 punto.

Ejercicio 2.- (Puntuación máxima: 3 puntos).
Apartado (a) Estudio correcto de la continuidad 0,50 puntos.
Estudio correcto de la derivabilidad 0,50 puntos.
Total apartado (a) 1 punto.
Apartado (b) Representación del trozo correspondiente al dominio $(-\infty, 1]$ 0,50 puntos.
Representación del trozo correspondiente al dominio $(1, +\infty)$ 0,50 puntos.
Total apartado (b) 1 punto.
Apartado (c) Planteamiento correcto de la integral definida 0,50 puntos.
Obtención del área 0,50 puntos.
Total apartado (c) 1 punto.

Ejercicio 3.- (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a) Planteamiento correcto 0,25 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida 0,25 puntos.

Total apartado(a) 0,50 puntos.
Apartado (b) Planteamiento correcto 0,25 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida 0,25 puntos.
Total apartado (b) 0,50 puntos.
Apartado (c) Planteamiento correcto 0,25 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida 0,25 puntos.
Total apartado (c) 0,50 puntos.
Apartado (d) Planteamiento correcto 0,25 puntos.
Cálculo correcto de la probabilidad pedida 0,25 puntos.
Total apartado (d) 0,50 puntos.

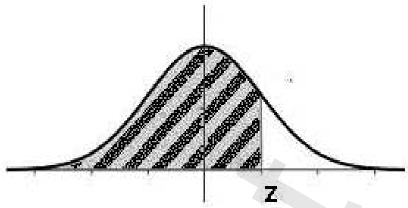
Ejercicio 4.- (Puntuación máxima: 2 puntos).
Apartado (a) Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ 0,25 puntos.
Cálculo correcto de la media 0,25 puntos.
Cálculo correcto del tamaño de la muestra 0,50 puntos.
Total apartado (a) 1 punto.

Apartado (b) Cálculo correcto de $z_{\alpha/2}$ 0,25 puntos.
Expresión correcta de la fórmula 0,25 puntos.
Obtención correcta de la diferencia entre μ y la media muestral 0,50 puntos.
Total apartado (b) 1 punto.

NOTA:
La resolución de ejercicios por cualquier procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7652
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8930
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9561	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9934	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9901	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990