

Examen de Matemáticas II (Junio 2012)
Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

se pide:

- a) (1,5 puntos) Hallar el rango de A en función de los valores de k .
- b) (0,75 puntos) Para $k = 2$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = B$.
- c) (0,75 puntos) Para $k = 1$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = C$.

Solución:

a)

$$|A| = 4k(k^2 - 1) = 0 \implies k = 0, \quad k = \pm 1$$

- Si $k \neq 0$ o $k \neq \pm 1 \implies \text{Rango}(A) = 3$
- Si $k = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \implies \text{Rango}(A) = 2$$

- Si $k = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \implies \text{Rango}(A) = 2$$

- Si $k = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \implies \text{Rango}(A) = 2$$

b) Si $k = 2$:

$$AX = B \implies X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/12 & -1/2 & 1/3 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/12 & 1/2 & -1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 8/3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/12 & -1/2 & 1/3 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/12 & 1/2 & -1/6 \end{pmatrix}$$

c) Si $k = 1$ el sistema $AX = C$ tiene como matriz asociada:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{array} \right), \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \implies \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \implies$ el sistema es incompatible y no tiene solución.

Problema 2 (3 puntos) Dados los puntos $P_1(1, 3, -1)$, $P_2(a, 2, 0)$, $P_3(1, 5, 4)$ y $P_4(2, 0, 2)$, se pide:

- (1 punto). Hallar el valor de a para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.
- (1 punto). Hallar los valores de a para que el tetraedro con vértices en P_1, P_2, P_3, P_4 tenga volumen igual a 7.
- (1 punto). Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3 .

Solución:

a) Tenemos $\overrightarrow{P_1P_2} = (a-1, -1, 1)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (0, 2, 5)$, $\overrightarrow{P_1P_4} = (1, -3, 3)$:

$$\begin{vmatrix} a-1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 7(3a-4) = 0 \implies a = \frac{4}{3}$$

b)

$$7 = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} a-1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} \right| \implies |3a-4| = 6 \implies \begin{cases} a = 10/3 \\ a = -2/3 \end{cases}$$

c)

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2} \implies$$

$$4y + 10z - 31 = 0$$

Problema 3 (2 puntos) Hallar a , b , c de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x = 3$ un punto de inflexión.

Solución:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, \quad f''(x) = 6x + 2a$$

$$\begin{cases} f(1) = 2 \implies a + b + c = 1 \\ f'(1) = 0 \implies 2a + b = -3 \\ f''(3) = 0 \implies a = -9 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -9 \\ b = 15 \\ c = -5 \end{cases}$$

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 5$$

Problema 4 (2 puntos) Calcular razonadamente las siguientes integrales definidas:

▪ (1 punto). $\int_0^\pi e^{2x} \cos x \, dx$

▪ (1 punto). $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 2x} \, dx$

Solución:

▪ (1 punto). $\int_0^\pi e^{2x} \cos x \, dx = -\frac{2}{5}(e^{2\pi} + 1)$

$$I = \int e^{2x} \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = \cos x \implies du = -\sin x \\ dv = e^{2x} \, dx \implies v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right] = \frac{e^{2x} \cos x}{2} + \frac{1}{2} \int e^{2x} \sin x \, dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} u = \sin x \implies du = \cos x \\ dv = e^{2x} \, dx \implies v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right] = \frac{e^{2x} \cos x}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2x} \sin x}{2} - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos x \, dx \right)$$

$$I = \frac{e^{2x} \cos x}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^{2x} \sin x}{2} - \frac{1}{4} I \implies I + \frac{1}{4} I = \frac{(2 \cos x + \sin x) e^{2x}}{4} \implies$$

$$\int e^{2x} \cos x \, dx = \frac{(2 \cos x + \sin x) e^{2x}}{5}$$

▪ $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 2x} \, dx = -\frac{1}{2} \arctan(\cos 2x) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$

Examen de Matemáticas II (Junio 2012)
Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (3 puntos) Dadas las funciones

$$f(x) = \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2-3}}, \quad g(x) = (\ln x)^x, \quad h(x) = \operatorname{sen}(\pi - x)$$

se pide:

- a) (1 punto). Hallar el dominio de $f(x)$ y el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- b) (1 punto). Calcular $g'(e)$.
- c) (1 punto). Calcular, en el intervalo $(0, 2\pi)$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas y las coordenadas de los extremos relativos de $h(x)$.

Solución:

a) $\operatorname{Dom}(f) = (\sqrt{3}, \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2-3}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x+1}}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-3}}} = 3$$

b)

$$g'(x) = (\ln x)^x \left(\ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln x} \right) \Rightarrow g'(e) = 1$$

- c) $h(x)\operatorname{sen}(\pi - x) = 0 \Rightarrow \pi - x = k\pi \Rightarrow x = (1 - k)\pi$, el único punto de corte en este intervalo es en $x = \pi$.

$$h'(x) = -\cos(\pi - x) = 0 \Rightarrow \pi - x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \pi \left(\frac{1}{2} - k \right)$$

$$\text{Luego } x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}.$$

Problema 2 (3 puntos) Dadas las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z}{2}, \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 5 \end{cases}$$

se pide:

- a) (1 punto). Estudiar su posición relativa.
 b) (2 puntos). Hallar la mínima distancia de r_1 a r_2 .

Solución:

$$r_1 : \begin{cases} \vec{u}_{r_1} = (3, -5, 2) \\ P_{r_1}(2, 1, 0) \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} \vec{u}_{r_2} = (-1, 1, 0) \\ P_{r_2}(-1, 3, 5) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (-3, 2, 5)$$

a)

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \implies r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan}$$

b)

$$d(r_1, r_2) = \frac{|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \vec{u}_{r_1}, \vec{u}_{r_2}]|}{|\vec{u}_{r_1} \times \vec{u}_{r_2}|} = \frac{|-8|}{2\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} u$$

$$|\vec{u}_{r_1} \times \vec{u}_{r_2}| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = |(-2, -2, -2)| = 2\sqrt{3}$$

Problema 3 (3 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2-a & 3+a & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

- a) (1 punto). Estudiar el rango de la matriz B en función de a .
 b) (1 punto). Para $a = 0$, calcular la matriz X que verifica $AX = B$.

Solución:

a)

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -7 \\ 3 & 2-a & 3+a \end{vmatrix} = 40(1-a) = 0 \implies a = 1$$

Luego si $a \neq 1 \implies \text{Rango}(B) = 3$. Si $a = 1$:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|B_1| = |B_2| = |B_3| = |B_4| = 0 \implies \text{Rango}(B) = 2$$

b) Si $a = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \implies X = A^{-1}B :$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 4 (2 puntos) Calcular el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 - F_4 \\ F_2 - F_4 \\ F_3 - F_4 \\ F_4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)(y-1)(z-1)$$