

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)

Marzo 2011

Problema 1 Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 + 2 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

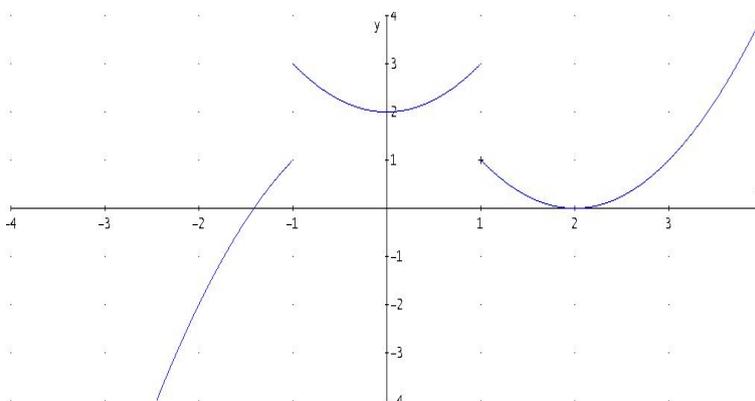
se pide:

1. Estudia su continuidad en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 1$.
2. Representala gráficamente.
3. Extremos relativos de f en el intervalo $[-1, 1]$. Razona la respuesta.

(Castilla La Mancha (junio 2010))

Solución:

1. Gráficamente:



2. Continuidad en $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-x^2 + 2) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 + 2) = 3$$

En $x = -1$ hay una discontinuidad no evitable (salto).

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 2)^2 = 1$$

En $x = 1$ hay una discontinuidad no evitable (salto).

3. La función es $f(x) = x^2 + 2$ en el intervalo $[-1, 1]$.

$$f'(x) = 2x = 0 \implies x = 0$$

$$f''(x) = 2 > 0 \implies f''(0) = 2 > 0$$

La función tiene un mínimo en el punto $(0, 2)$. Decece en el intervalo $(-1, 0)$ y crece intervalo $(0, 1)$.

Problema 2 Dada la función $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x+3}$, determina

1. Calcula sus asíntotas
2. Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos.

(Castilla y León (junio 2010))

Solución:

1. Asíntotas:

- Verticales: en $x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{(x-3)^2}{x+3} = \left[\frac{64}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x-3)^2}{x+3} = \left[\frac{64}{0^+} \right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-3)^2}{x+3} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-3)^2}{x^2 + 3x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x-3)^2}{x+3} - x \right) = -9$$

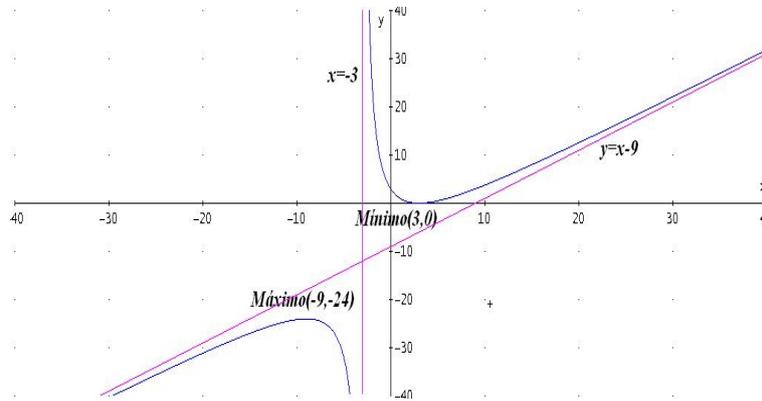
2. Monotonía y extremos:

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x+3}, \quad f'(x) = \frac{x^2 + 6x - 27}{(x+3)^2} = 0 \implies x = 3, \quad x = -9$$

	$(-\infty, -9)$	$(-9, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -9) \cup (3, \infty)$ y decrece en el intervalo $(-9, -3) \cup (-3, 3)$

La función tiene un máximo en el punto $(-9, -24)$ y un mínimo en el punto $(3, 0)$.



Problema 3 Una panadería se dedica a la elaboración y venta de magdalenas caseras. El coste en euros de producir x kg de magdalenas viene dado por la función

$$f(x) = 0,02x^3 - 0,3x^2 + \frac{35}{6}x$$

El precio de venta de 1 kg de magdalenas es de 5 euros.

1. Determina la función de beneficio neto diario de la panadería por la producción de magdalenas. ¿Cuál es el beneficio del panadero si un día elabora y vende exactamente 5 kg de magdalenas?
2. Hallar la cantidad de magdalenas que debe elaborar diariamente para conseguir el mayor beneficio. ¿Cuál es el beneficio máximo que puede alcanzar al día por la elaboración y venta de magdalenas?

(Castilla y León (junio 2010))

Solución:

1.

$$b(x) = 5x - \left(0,02x^3 - 0,3x^2 + \frac{35}{6}x\right)$$

$$b(x) = -0,02x^3 + 0,3x^2 - \frac{5}{6}x$$

$$b(5) = 0,83 \text{ euros}$$

2.

$$b'(x) = -0,06x^2 + 0,6x - \frac{5}{6} = 0 \implies x = 1,66, \quad x = 8,33$$

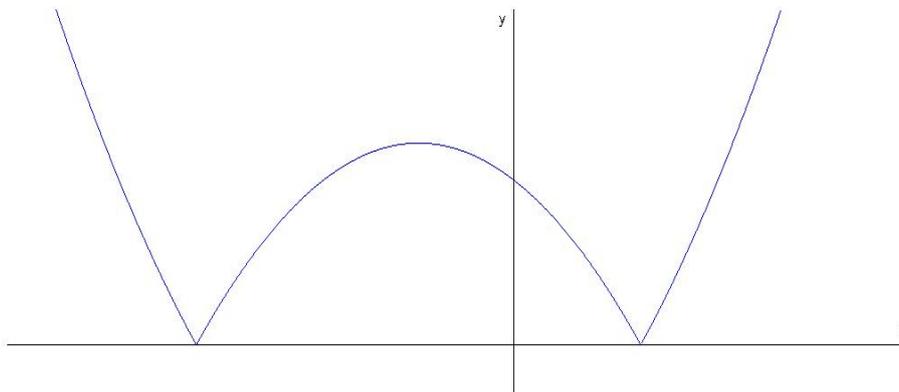
	$(-\infty; 1,66)$	$(1,66; 8,33)$	$(8,33; \infty)$
$b'(x)$	-	+	-
$b(x)$	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

El máximo beneficio se obtiene con la elaboración de 8,33 kg de magdalenas y es de $f(8,33) = 2,31$ euros.

Problema 4 Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 + 3x - 10|$ y representarla gráficamente.

Solución:

$$\text{Hacemos } g(x) = x^2 + 3x - 10 \implies g'(x) = 2x + 3 = 0 \implies x = -\frac{3}{2}$$



x	y
0	-10
-5	0
2	0
$-3/2$	$-49/4$

$g''(x) = 2 \implies g''\left(-\frac{3}{2}\right) > 0 \implies$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{49}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la

curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(-\frac{3}{2}, \frac{49}{4}\right)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 10 & \text{si } x \leq -5 \\ -(x^2 + 3x - 10) & \text{si } -5 < x \leq 2 \\ x^2 + 3x - 10 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

Continuidad en $x = -5$:

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^-} (x^2 + 3x - 10) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^+} (-x^2 - 3x + 10) = 0$$

$$f(-5) = 0$$

Luego f es continua en $x = -5$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 - 3x + 10) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 3x - 10) = 0$$

$$f(2) = 0$$

Luego f es continua en $x = 2$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \leq -5 \\ -2x - 3 & \text{si } -5 < x \leq 2 \\ 2x + 3 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = -5$:

$$f'(-5^-) = -7, \quad f'(-5^+) = 7 \implies \text{no derivable}$$

Derivabilidad en $x = 2$:

$$f'(2^-) = -7, \quad f'(2^+) = 7 \implies \text{no derivable}$$

Problema 5 Calcular los números reales a , b y c de la función $f(x) = ax^2 - 2bx + c$, sabiendo que esta función pasa por el punto $(1, 2)$ y tiene un extremo en el punto $(3, 0)$.

Solución:

$$f(x) = ax^2 - 2bx + 3c, \quad f'(x) = 2ax - 2b$$

$$\begin{cases} f(1) = 2 \implies a - 2b + c = 2 \\ f(3) = 0 \implies 9a - 6b + c = 0 \\ f'(3) = 0 \implies 6a - 2b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 3/2 \\ c = 9/2 \end{cases}$$

Problema 6 Calcular el área encerrada por la función $f(x) = 3x^2 - 12$ el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

Solución:

$$f(x) = 3x^2 - 12 = 0 \implies x = \pm 2$$

$$S_1 = \int_1^2 (3x^2 - 12) dx = x^3 - 12x \Big|_1^2 = -5$$

$$S_2 = \int_2^3 (3x^2 - 12) dx = x^3 - 12x \Big|_2^3 = 7$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 5 + 7 = 12 \text{ u}^2$$

