

## Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)

Mayo 2011

---

---

**Problema 1** Dada la función

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x^2-9}$$

se pide:

1. Estudiar su continuidad y derivabilidad.
2. Representarla gráficamente.
3. Calcular el área encerrada por la función, el eje  $OX$  y las rectas  $x=0$  y  $x=2$ .

**Solución:**

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x-1}{x^2-9} & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-1}{x^2-9} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} -\frac{x^2-2x+9}{(x^2-9)^2} & \text{si } x < 1 \\ \frac{x^2-2x+9}{(x^2-9)^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Continuidad y derivabilidad:

- La función es discontinua en los puntos  $x = \pm 3$  dado que en ellos se anula el denominador. Hay que comprobar la continuidad en  $x = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{x-1}{x^2-9} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x^2-9} = 0$$

$$f(1) = 0$$

Luego la función es continua en  $x = 1$ . La función es continua en  $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

- La función no es derivable en  $x = \pm 3$  ya que en ellos no es continua. Hay que comprobar la derivabilidad en  $x = 1$ :

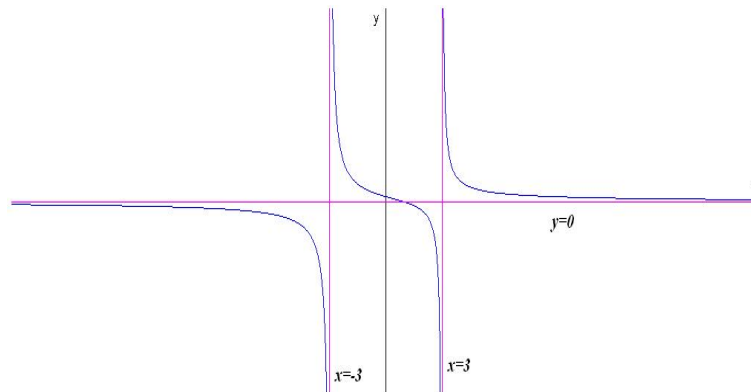
$$f'(1^-) = -\frac{1}{8} \quad f'(1^+) = \frac{1}{8}$$

Luego la función no es derivable en  $x = 1$ . En conclusión la función es derivable en  $\mathbb{R} - \{-3, 1, 3\}$ .

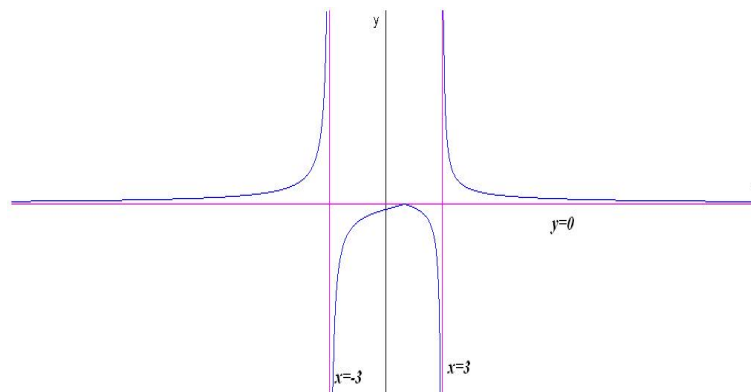
2. Representación gráfica: Para ello utilizamos la función auxiliar

$$g(x) = \frac{x-1}{x^2-9}$$

A grandes rasgos la función tiene tres asíntotas, dos verticales  $x = \pm 3$  y una horizontal  $y = 0$ . A la vista de la derivada no hay extremos y la función es siempre decreciente. Para dibujar la función que nos piden



hay que cambiar el signo a la rama  $x < 1$ :



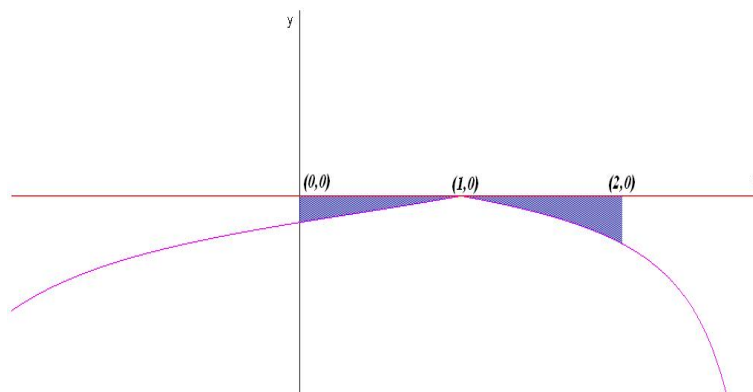
3. El área que nos piden es la suma de dos áreas dado que en  $x = 1$  la función cambia de rama:

$$S_1 = \int_0^1 -\frac{x-1}{x^2-9} dx = -\left(\frac{1}{3} \ln|x-3| + \frac{2}{3} \ln|x+3|\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{27}{32}\right) = -0,057$$

$$S_2 = \int_1^2 \frac{x-1}{x^2-9} dx = \left(\frac{1}{3} \ln|x-3| + \frac{2}{3} \ln|x+3|\right) \Big|_1^2 = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{25}{32}\right) = -0,082$$

$$S = |S_1| + |S_2| = -\frac{1}{3} \ln\left(\frac{675}{1024}\right) = 0,14 u^2$$

La integral se resuelve mediante una descomposición polinómica:



$$\frac{x-1}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-3)}{x^2-9}$$

$$x-1 = A(x+3) + B(x-3)$$

$$\begin{cases} x = -3 \implies 2 = 6A \implies A = 1/3 \\ x = 3 \implies -4 = -6B \implies B = 2/3 \end{cases}$$

$$\int \frac{x-1}{x^2-9} dx = \frac{1}{3} \ln|x-3| + \frac{2}{3} \ln|x+3|$$