Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Marzo 2011

Problema 1 Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

se pide:

1. Determina si la función es derivable en $x = 0$
2. Estudia el crecimiento y decrecimiento de f y dibuja su gráfica.
3. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de f, el eje de abcisas ($y = 0$) y las rectas verticales $x = -3$ y $x = 2$.

(Cantabria (junio 2010))

Solución:

1. Continuidad en $x = 0$:

   $$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} x^2 = 0$$

   $$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} 2x = 0$$

   $$f(0) = 0$$

   Luego f es continua en $x = 0$ Derivabilidad en $x = 0$:

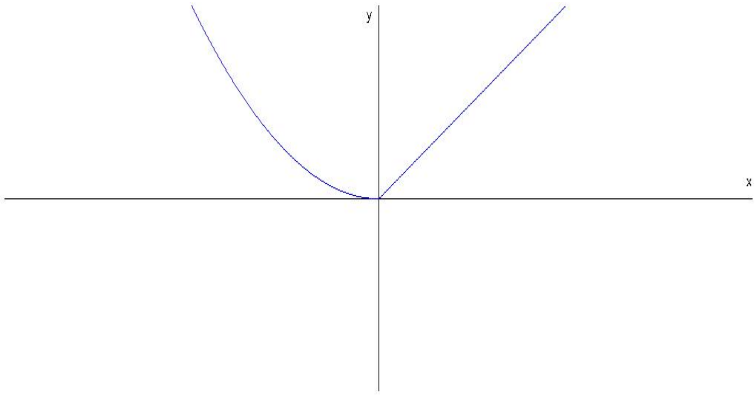
   $$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ 2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

   $f'(0^-) = 0$ y $f'(0^+) = 2 \Longrightarrow f$ no es derivable en $x = 0$.

2. Si $x < 0 \Longrightarrow f'(x) = 2x < 0 \Longrightarrow$ la función f es en este caso decreciente.

   Si $x \geq 0 \Longrightarrow f'(x) = 2 > 0 \Longrightarrow$ la función f es en este caso creciente.

   Luego la función es creciente en el intervalo $(0, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.



3.

$$S_1 = \int_{-3}^{0} x^2\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{0} = 9$$

$$S_2 = \int_{0}^{2} 2x\, dx = \left. x^2 \right]_{0}^{2} = 4$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 13\, u^2$$

Problema 2 Calcular b y c sabiendo que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

es derivable en el punto $x = 0$ (Castilla y León (junio 2010))

Solución:

- Por la continuidad en $x = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} (x^2 + bx + c) = c$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{\ln(x+1)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{x+1}}{x} = 1$$

Luego $c = 1$.

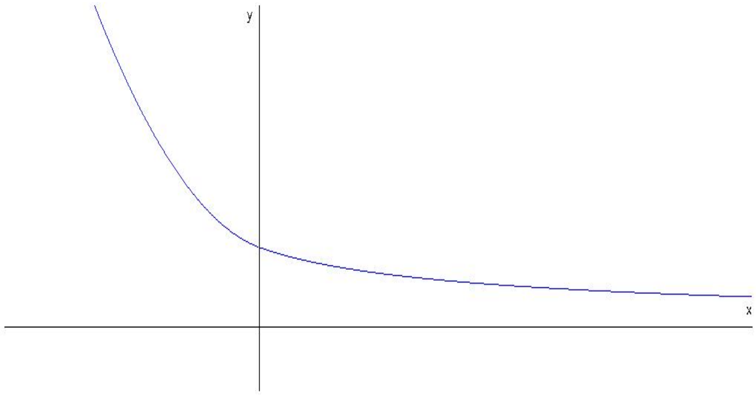
- Por la derivabidad en $x = 0$:

$$\text{Si } x \leq 0 \Longrightarrow f'(x) = 2x + b \Longrightarrow f'(0^-) = b$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\frac{\ln(h+1)}{h} - 1}{h} =$$

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\ln(h+1) - h}{h^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 1}{2h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{-h}{2h(h+1)} = -\frac{1}{2}$$

Luego $b = -\frac{1}{2}$.



Problema 3 Calcular la siguiente integral

$$\int_{-1}^{2} |x^2 - 3x + 2|\, dx$$

(Castilla y León (junio 2010))

Solución:
Hacemos $g(x) = x^2 - 3x + 2 \Longrightarrow g'(x) = 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = \frac{3}{2}$:

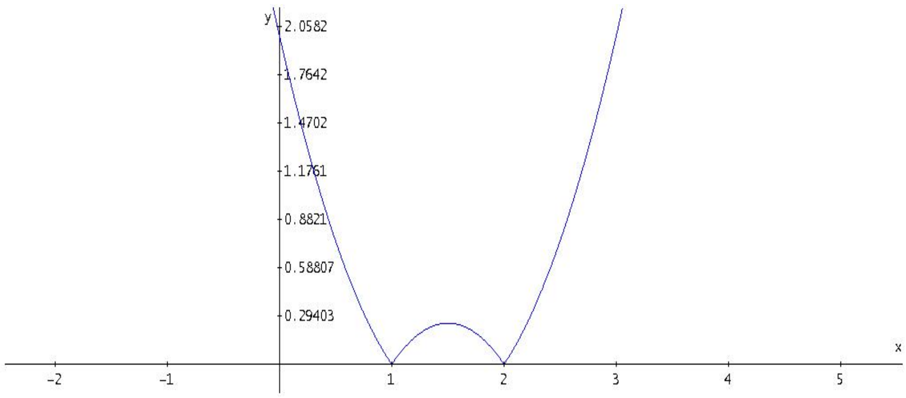
x	y
0	2
2	0
1	0
3/2	−1/4

$g''(x) = 2 \Longrightarrow g''\left(\frac{3}{2}\right) > 0 \Longrightarrow$ por lo que hay un mínimo en el punto $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. La función valor absoluto convertirá la parte negativa de la curva en su simétrica positiva, por lo que el mínimo se convertirá en un máximo en el punto: $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 - 3x + 2 & \text{si} & x \le 1 \\ -(x^2 - 3x + 2) & \text{si} & 1 < x \le 2 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si} & 2 \le x \end{array} \right.$$

$$\int_{-1}^{2} |x^2 - 3x + 2|\, dx = \int_{-1}^{1} (x^2 - 3x + 2)\, dx + \int_{1}^{2} (-x^2 + 3x - 2)\, dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big]_{-1}^{1} + \left(-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big]_{1}^{2} = \frac{29}{6}$$



Problema 4 Dada la la función

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

se pide:

1. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los de concavidad y convexidad, y las asíntotas.
2. Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, el eje OX y las rectas $x = 2$, $x = 4$.

(Castilla y León (junio 2010))

Solución:

1. ▪ Asíntotas:
    - Verticales: En $x = 1$

    $$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty$$

    $$\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

    - Horizontales: En $y = 1$

    $$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$$

    - Oblicuas: No hay por haber horizontales.

   ▪ Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

    $$f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0$$

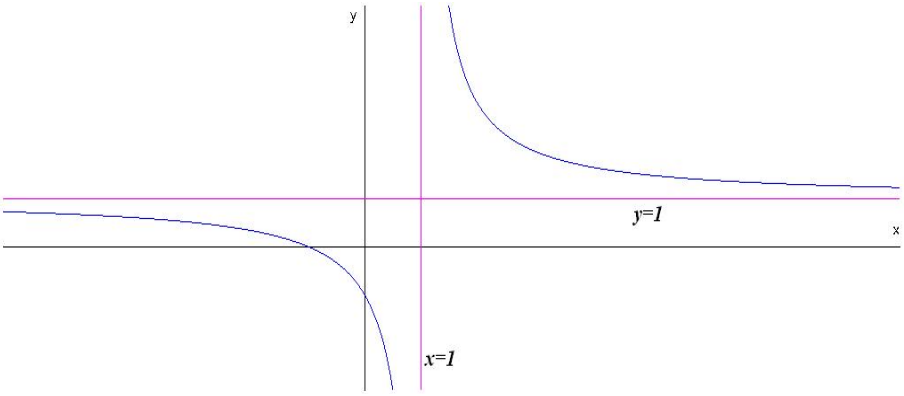
    La función f es decreciente en el intervalo $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ y, por tanto, no tiene extremos.

- Intervalos de concavidad y covexidad:

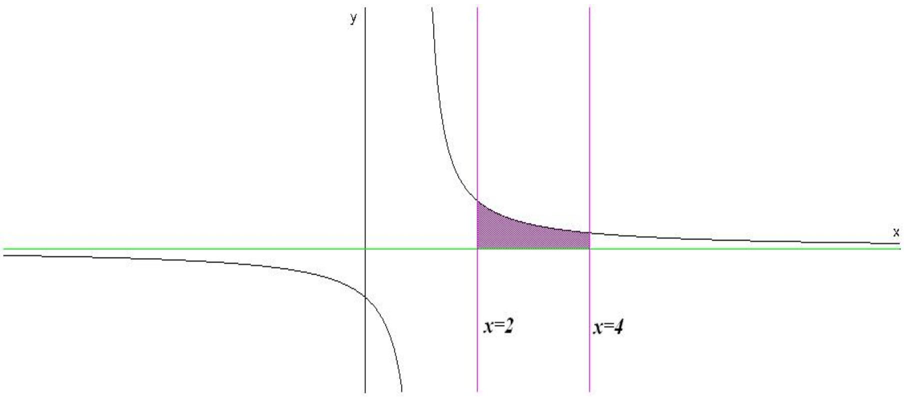
$$f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3} \neq 0$$

La función f no tiene puntos de inflexión.

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$



2. Calcular el siguiente área:



$$g(x) = \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)}$$
$$x + 1 = A(x-1) + Bx$$

Si hacemos $x = 0 \Longrightarrow A = -1$ y si hacemos $x = 1 \Longrightarrow B = 2$, luego:

$$g(x) = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1}$$

Si hacemos $g(x) = 0 \Longrightarrow x = -1$ que esta fuera del recinto donde queremos calcular el área. Luego

$$S = \int_2^4 \frac{x+1}{x(x-1)}\,dx = \int_2^4 \left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1}\right) dx =$$

$$= -\ln|x| + 2\ln|x-1|\Big]_2^4 = \ln\frac{9}{2} = 4,5\ u^2$$

Problema 5 Calcular el límite

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x - x\cos x - 1}{\sin x - x + 1 - \cos x}$$

(Extremadura (junio 2010))

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x - x\cos x - 1}{\sin x - x + 1 - \cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x - \cos x + x\sin x}{\cos x - 1 + \sin x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x + \sin x + \sin x + x\cos x}{-\sin x + \cos x} = 1$$

Problema 6 Calcular el límite

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^2}$$

(Andalucía (junio 2010))

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x - \cos x e^{\sin x}}{2x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x + \sin x e^{\sin x} - \cos^2 x e^{\sin x}}{2} = 0$$

Problema 7 Calcúlese utilizando la fórmula de integración por partes, una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = x^2e^{-x}$ que cumpla $F(0) = 0$
(Extremadura (junio 2010))

Solución:

Hacemos $u = x^2 \Longrightarrow du = 2xdx$ y $dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x}$

$$F(x) = \int x^2e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx$$

Hacemos $u = x \Longrightarrow du = dx$ y $dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x}$

$$F(x) = \int x^2 e^{-x}\, dx = -x^2 e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx\right)$$

$$F(x) = \int x^2 e^{-x}\, dx = -x^2 e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} - e^{-x}\right) + C = -2e^{-x}(x^2 - x - 1) + C$$

$$F(0) = -2 + C = 0 \Longrightarrow C = 2$$

$$F(x) = -2e^{-x}(x^2 - x - 1) + 2$$

Problema 8 Calcular los números reales a, b y c de la función $f(x) = ax^2 - 2bx + c$, sabiendo que esta función pasa por el punto $(1, 2)$ y tiene un extremo en el punto $(3, 0)$.

Solución:

$$f(x) = ax^2 - 2bx + 3c, \quad f'(x) = 2ax - 2b$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(1) = 2 \Longrightarrow a - 2b + c = 2 \\ f(3) = 0 \Longrightarrow 9a - 6b + c = 0 \\ f'(3) = 0 \Longrightarrow 6a - 2b = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = 3/2 \\ c = 9/2 \end{array}\right.$$