Examen de Matemáticas II (Junio 2011)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) (1 punto). Calcular el rango de A en función de los valores de a.

b) (1 punto). En el caso de $a = 2$, discutir el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ en función de los valores de b, y resolverlo cuando sea posible.

c) (1 punto). En el caso de $a = 1$, resolver el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $|A| = 4 - a^2 = 0 \Longrightarrow a = \pm 2$, por tanto, si $a \neq \pm 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3$.

Si $a = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Luego en este caso Rango$(A) = 2$.

Si $a = -2$:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Luego en este caso Rango$(A) = 2$

b) Si $a = 2$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & b \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = 0 \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Luego el Rango$(A) = 2$ independientemente del valor de b. Tal y como se había estudiado en el apartado anterior.

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & b \end{vmatrix} = 6(b-3) = 0 \Longrightarrow b = 3$$

Si $b \neq 3 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3$ y el sistema sería Incompatible, por el contrario, si $b = 3$ el Rango$(\overline{A}) = 2$, y en este caso sería Compatible Indeterminado. En este último caso:

$$\left\{ \begin{array}{l} -x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

c)

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{array} \right.$$

Problema 2 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos). Hallar el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas

$$r_1 \equiv \; x = y = z, \;\; r_2 \equiv \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. , \;\; r_3 \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

con el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24$.

b) (1,5 puntos). Hallar la recta s que corta perpendicularmente a las rectas

$$r_4 \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-2}, \;\; r_5 \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$$

Solución:

a) LLamamos A al punto intersección de π con r_1:

$$2x+3x+7x=24 \Longrightarrow x=2 \Longrightarrow A(2,2,2)$$

LLamamos B al punto intersección de π con r_2:

$$2x=24 \Longrightarrow x=12 \Longrightarrow B(12,0,0)$$

LLamamos C al punto intersección de π con r_3:

$$3y=24 \Longrightarrow y=8 \Longrightarrow B(0,8,0)$$

Tendremos con el origen los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{OA}=(2,2,2)\ \ \overrightarrow{OB}=(12,0,0)\ \ \overrightarrow{OC}=(0,8,0)$$

$$V=\frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}|=32\,u^3$$

b) Calculamos un vector perpendicular a las dos rectas:

$$\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_{r_4}}\times\overrightarrow{u_{r_5}}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=(4,-3,-1)$$

Calculamos la recta perpendicular a estas rectas como intersección de dos planos:

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=(4,-3,-1) \\ \overrightarrow{u_{r_4}}=(1,2,-2) \\ P_{r_4}(-1,5,-1) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi_1:\begin{vmatrix} 4 & 1 & x+1 \\ -3 & 2 & y-5 \\ -1 & -2 & z+1 \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow \pi_1: 8x+7y+11z-16=0$$

$$\pi_2:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t}=(4,-3,-1) \\ \overrightarrow{u_{r_5}}=(2,3,-1) \\ P_{r_4}(0,-1,1) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi_1:\begin{vmatrix} 4 & 2 & x \\ -3 & 3 & y+1 \\ -1 & -1 & z-1 \end{vmatrix}=0 \Longrightarrow \pi_1: 3x+y+9z-8=0$$

La recta buscada será:

$$t:\left\{\begin{array}{l} 8x+7y+11z-16=0 \\ 3x+y+9z-8=0 \end{array}\right.$$

Problema 3 *(2 puntos)* Se pide:

a) (1 punto). Calcular la integral $\displaystyle\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2}\,dx$.

b) (1 punto). Hallar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x)=\sqrt{12-3x^2}$.

Solución:

a)

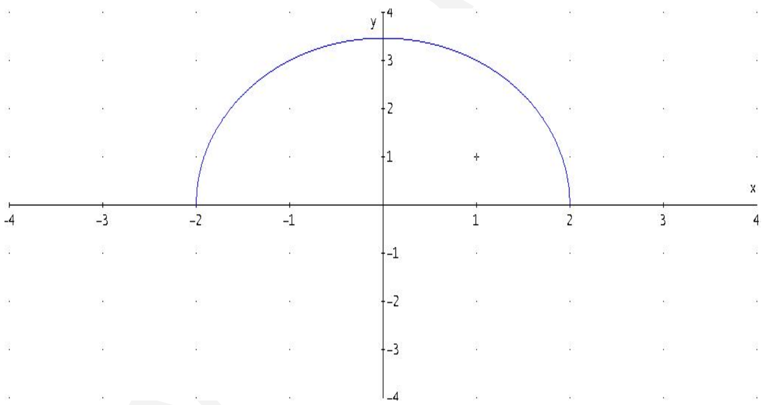
$$\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2}\,dx = \left.\frac{\sqrt{(4+5x^2)^3}}{15}\right]_1^3 = \frac{316}{15}$$

b) El dominio de la función viene dado por la inecuación $12-3x^2 \geq 0 \Longrightarrow Dom(f) = [-2, 2]$ y su signo es siempre positivo, la función siempre está por encima del eje de abcisas; como en $x = \pm 2$ la función vale cero en estos dos puntos que serán mínimos relativos. Por otra parte:

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-2, 0)$	$(0, 2)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$

Luego hay un máximo en el punto $(0, 2\sqrt{3})$ que, por ser el único, será un máximo absoluto. Alcanzará un mínimo absoluto en los puntos en los que $f(x) = 0 \Longrightarrow (-2, 0)$ y $(2, 0)$.



Problema 4 *(2 puntos)* Se pide:

a) (1 punto). Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

b) (1 punto). Demostrar que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ sólo tiene una raiz real, cualquiera que sea el número m. Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan.

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$$

b) Sea cual sea el valor de m, la función $f(x)=4x^5+3x+m$ es una función polinómica y, por tanto, continua y derivable en R.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}(x^5+3x+m)=\infty \ \text{ y } \ \lim_{x\longrightarrow-\infty}(x^5+3x+m)=-\infty$$

Luego la función cambia de signo en el intervalo $(-\infty,\infty)$ y, por el teorema de Bolzano, necesariamente tiene cortar al eje de abcisas.

$$f'(x)=20x^4+3\geq 0 \ \ \forall x\in R$$

Luego la función es siempre creciente, en consecuencia sólo puede haber un punto de corte (Teorema de Rolle).

Examen de Matemáticas II (Modelo 2011) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x)=\frac{ax^4+1}{x^3}$$

Se pide:

a) (1 punto). Determinar el valor de a para el que la función posee un mínimo relativo en $x=1$. Para este valor de a obtener los otros puntos en que f tiene un extremo relativo.

b) (1 punto). Obtener las asíntotas de de la gráfica de $y=f(x)$ para $a=1$.

c) (1 punto). Esbozar la gráfica de la función para $a=1$.

Solución:

a)

$$f'(x)=\frac{ax^4-3}{x^4}=0 \ \text{ y } \ f'(1)=0\Longrightarrow a=3$$

$$f''(x) = \frac{12}{x^5} \Longrightarrow f''(1) = 12 > 0$$

Luego en $x = 1$ la función tiene un mínimo relativo.

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 3}{x^4} = 0 \Longrightarrow 3x^4 = 3 \Longrightarrow x = \pm 1$$

En $x = -1$:

$$f''(x) = \frac{12}{x^5} \Longrightarrow f''(-1) = -12 < 0$$

Luego en $x = -1$ la función tiene un máximo relativo.

b) Si $a = 1$:

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3}$$

Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \left[\frac{1}{0}\right] = \pm\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = -\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^3} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^4} = 1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^4 + 1}{x^3} - x \right) = 0$$

$$y = x$$

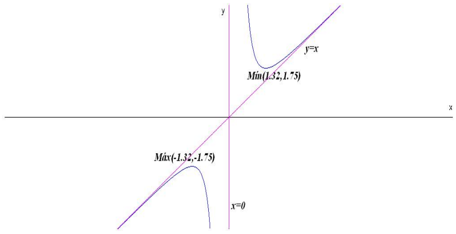
c) La gráfica para $a = 1$:

Se trata de una función IMPAR, bastaría con calcular sus extremos

$$f'(x) = \frac{x^4 - 3}{x^4} = 0 \Longrightarrow x = -1,32, \;\; x = 1,32$$

	$(-\infty; -1,32)$	$(-1,32; 1,32)$	$(1,32; \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función tiene un máximo relativo en el punto $(-1,32; -1,75)$ y un mínimo relativo en el punto $(1,32; 1,75)$



Problema 2 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos). Discutir el sistema de ecuaciones $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & (m-1) \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m+2 \end{pmatrix}$$

según los valores de m.

b) (1,5 puntos). Resolver el sistema en los casos $m = 0$ y $m = 1$.

Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} & y+ & (m-1)z = & m \\ & (m-1)y+ & z = & m \\ (m-2)x+ & & = & m+2 \end{array} \right.$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & (m-1) & m \\ 0 & m-1 & 1 & m \\ m-2 & 0 & 0 & m+2 \end{array} \right) \quad |A| = -m(m-2)^2 = 0 \Longrightarrow m = 0, \ \ m = 2$$

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A})$ = 3 =n^o de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $m = 0$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Sistema es Compatible Indeterminado.

- Si $m = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Sistema es Incompatible.

b) Si $m = 0$

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} & y- & z = & 0 \\ -2x & & = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Si $m = 1$

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} & y & = & 1 \\ & & z = & 1 \\ -x & & = & 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -3 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

Problema 3 *(3 puntos)* Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + y - 2z = 1, \quad \pi_2 \equiv x - y + 2z = 1$$

se pide:

a) (0,5 puntos). Estudiar su posición relativa.

b) (1,5 puntos). En caso de que los planos sean paralelos hallar la distancia entre ellos, en caso de que se corten, hallar un punto y un vector de dirección de la recta que determinan.

Solución:

a)

$$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} \Longrightarrow \text{se cortan}$$

b)

$$t : \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - 2z = 1 \\ x - y + 2z = 1 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{c} x = 2/3 \\ y = -1/3 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

La recta intersección viene determinada por el punto $P_t\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)$ y el vector director $\overrightarrow{u_t} = (0, 2, 1)$.

Otra manera de calcular estos datos sería $\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}}$, y el punto P_t, dando un valor cualquiera (mismamente $z = 0$) y resolviendo el sistema que queda.

Problema 4 *(2 puntos)* Se pide:

a) (0,75 puntos). Hallar la ecuación del plano π_1 que pasa por los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,1)$.

b) (0,75 puntos). Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene al punto $P(1,2,3)$ y es perpendicular al vector $\overrightarrow{v}=(-2,1,1)$.

c) (0,5 puntos). Hallar el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P.

Solución:

a)

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-1,2,0)\\ \overrightarrow{AC}=(-1,0,1)\\ \text{A(1,0,0)}\end{array}\right. \Longrightarrow \pi_1:\left|\begin{array}{ccc}-1&-1&x-1\\ 2&0&y\\ 0&1&z\end{array}\right|=0\Longrightarrow 2x+y+2z-2=0$$

b) $-2x+y+z+\lambda=0\Longrightarrow -2+2+3+\lambda=0\Longrightarrow \lambda=-3$:

$$\pi_2: 2x-y-z+3=0$$

c) $\overrightarrow{AP}=(0,2,3)$:

$$V=\frac{1}{6}|\left|\begin{array}{ccc}-1&2&0\\ -1&0&1\\ 0&2&3\end{array}\right||=\frac{1}{6}|-8|=\frac{4}{3}\,u^3$$