

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)

Abril 2010

Problema 1 calcular a y b de manera que la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3ax^2 - 2bx + 8 & \text{si } x < 1 \\ bx^2 + 2ax - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

sea continua y derivable en $x = 1$.

Solución:

- f continua en $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3ax^2 - 2bx + 8) = 3a - 2b + 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (bx^2 + 2ax - 1) = b + 2a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \implies 3a - 2b + 8 = b + 2a - 1 \implies a - 3b + 9 = 0$$

- f derivable en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 6ax - 2b & \text{si } x < 1 \\ 2bx - 2a & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} f'(1^-) = 6a - 2b \\ f'(1^+) = 2b - 2a \end{cases}$$

$$f'(1^-) = f'(1^+) \implies 6a - 2b = 2b - 2a \implies a - b = 0$$

- En conclusión:

$$\begin{cases} a - 3b + 9 = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 9/2 \\ b = 9/2 \end{cases}$$

Problema 2 Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$, determina

1. Dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
2. Las asíntotas.
3. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
4. Máximos y mínimos relativos.
5. Utiliza la información anterior para representarla gráficamente.

Solución:

1. $Dom(f) = R - \{1\}$. Los puntos de corte serán los siguientes:

Si $x = 0 \implies (0, 4)$ y si $f(x) = 0 \implies (2, 0)$ y $(-2, 0)$.

2. Asíntotas:

■ Verticales: Las únicas posibles son $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 4x - 1 = \left[\frac{-3}{1^-} \right] = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 4x - 1 = \left[\frac{-3}{1^+} \right] = -\infty$$

■ Horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = \infty$$

■ Oblicuas: $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x} = 1$$

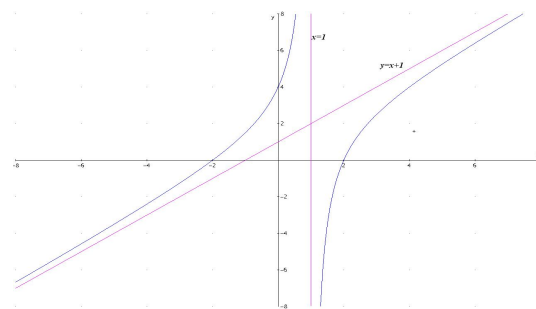
$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 1} - x \right) = 1$$

$$y = x + 1$$

3. Monotonía: $f'(x) = \frac{(x^2 - 2x + 4)}{(x - 1)^2} \neq 0 \implies$ No hay ni Máximos ni Mínimos, la función es siempre positiva y por tanto es creciente en todo el dominio de la función.

4. Máximos y mínimos relativos: No hay

5. Representación gráfica:



Problema 3 Calcular el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = 2x^2 - x + 1$ y $g(x) = x^2 + x + 4$.

Solución:

- Calculamos los puntos de corte de ambas funciones:

$$f(x) = g(x) \implies 2x^2 - x + 1 = x^2 + x + 4 \implies x^2 - 2x - 3 = 0 \implies x = -1, \quad x = 3$$

Los límites de integración serán los extremos del intervalo $[-1, 3]$.

- Calculamos la integral indefinida de $f(x) - g(x)$:

$$H(x) = \int (f(x) - g(x)) dx = \int (x^2 - 2x - 3) dx = \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} - 3x$$

$$H(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$$

- Calculamos:

$$S = \int_{-1}^3 (x^2 - 2x - 3) dx = H(3) - H(-1) = -\frac{32}{3}$$

- El área será:

$$\text{Área} = |S| = \left| -\frac{32}{3} \right| = \frac{32}{3} u^2$$

