Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Septiembre 2010) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones dependiente de un parámetro real a:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \\ -4 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 7a \end{pmatrix}$$

1. Discútase el sistema para los diferentes valores del parámetro a.
2. Resuélvase el sistema para el valor de a para el cual el sistema tiene infinitas soluciones.
3. Resuélvase el sistema para $a = 0$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \\ -4 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 22 \\ 7a \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y- & z = & 1 \\ 2x- & 3y+ & 2z = & 22 \\ x- & 4y+ & az = & 7a \end{array} \right.$$

1. $$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 22 \\ 1 & -4 & a & 7a \end{array} \right), \quad |A| = 15 - 5a = 0 \Longrightarrow a = 3$$

   - Si $a \neq 3 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$ Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado.
   - Si $a = 3$:

     $$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 22 \\ 1 & -4 & 3 & 21 \end{array} \right), \quad |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Longrightarrow$$

     $$\text{Rango}(A) = 2$$

     Claramente se observa que $F_3 = F_2 - F_1$, por tanto, el sistema es compatible indeterminado.

2. $$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y- & z = & 1 \\ 2x- & 3y+ & 2z = & 22 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 5 + (1/5)\lambda \\ y = -4 + (4/5)\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

www.musat.net

Problema 2 *(3 puntos)* El coste de un marco para una ventana rectangular es de 50 euros por cada metro de lado vertical y de 25 euros por cada metro de lado horizontal. Se desea construir una ventana de superficie igual a 2 m^2. Calcúlense las dimensiones (largo y alto) para que el marco sea lo más barato posible. Calcúlese el precio mínimo del marco de dicha ventana.

Solución:

LLamamos x a la longitud del lado horizontal e y a la longitud del lado vertical.

$$x \cdot y = 2 \Longrightarrow y = \frac{2}{x}$$

$$C(x,y) = 25x + 50y \Longrightarrow C(x) = 25x + 50 \cdot \frac{2}{x} = \frac{25x^2 + 100}{x}$$

$$C'(x) = \frac{25(x^2-4)}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 2, \quad x = -2$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
$C'(x)$	$+$	$-$	$+$
$C(x)$	creciente	decreciente	creciente

El mínimo estaría en el punto $(2,100)$, es decir, el coste mínimo sería de 100 euros y correspondería a unas dimensiones de 2 metros de lado horizontal y 1 metro de lado vertical.

Problema 3 *(2 puntos)* Sean tres sucesos A, B y C de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A|C) \geq P(B|C), \quad P(A|\overline{C}) \geq P(B|\overline{C})$$

Razónese cuál de las siguientes desigualdades es cierta:

$$\text{a) } P(A) < P(B); \quad \text{b) } P(A) \geq P(B)$$

Nota.- $\overline{C}$ representa el suceso complementario de C.

Solución:

$$P(A|C) \geq P(B|C) \Longrightarrow \frac{P(A\cap C)}{P(C)} \geq \frac{P(B\cap C)}{P(C)} \Longrightarrow P(A\cap C) \geq P(B\cap C)$$

$$P(A|\overline{C}) \geq P(B|\overline{C}) \Longrightarrow \frac{P(A\cap \overline{C})}{P(\overline{C})} \geq \frac{P(B\cap \overline{C})}{P(\overline{C})} \Longrightarrow P(A\cap \overline{C}) \geq P(B\cap \overline{C})$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap C) + P(A\cap \overline{C}) = P(A) \\ P(B\cap C) + P(B\cap \overline{C}) = P(B) \end{array}\right\} \Longrightarrow P(A) \geq P(B)$$

Luego es falso que $P(A) < P(B)$, se cumple que:

$$P(A) \geq P(B)$$

www.musat.net

Problema 4 *(2 puntos)* Se considera una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 320. Se toma una muestra aleatoria simple de 36 elementos.

1. Calcúlese la probabilidad de que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media de la distribución normal sea mayor o igual que 50.

2. Determínese el intervalo de confianza del 95 % para la media de la distribución normal, si la media muestral es igual a 4820.

Solución:

$$N(\mu, 320), \quad n = 36$$

1.

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{E\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{300}{320} = 0,9375$$

$$P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow$$

$$P(Z < 0,9375) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow 0,8289 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,3422$$

$$P(|\mu - \overline{X}| > 50) = \alpha = 0,3422 \text{ nivel de significación}$$

2.

$$\overline{X} = 4820, \quad z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (4715,47; 4924,53)$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Septiembre 2010) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Un pintor necesita pintura para pintar como mínimo una superficie de 480 m^2. Puede comprar la pintura a dos proveedores, A y B. El proveedor A le ofrece una pintura con un rendimiento de 6m^2 por kg y un precio de 1 euro por kg. La pintura del proveedor B tiene un precio de 1,2 euros por kg y un rendimiento de 8 m^2 por kg. Ningún proveedor le puede proporcionar más de 75 kg y el presupuesto máximo del pintor es de 120 euros. Calcúlese la cantidad de pintura que el pintor tiene que comprar a cada proveedor para obtener el mínimo coste. Calcúlese dicho coste mínimo.

Solución:

www.musat.net

LLamamos x al número de kg de pintura comprados al proveedor A y, llamamos y al número de kg de pintura comprados al proveedor B.

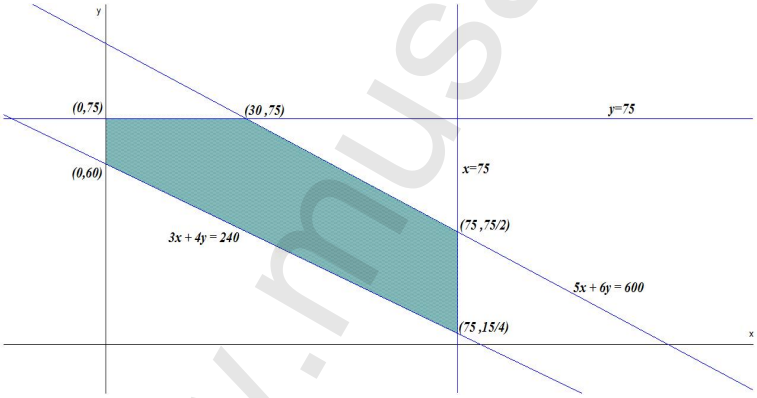
Proveedor	Rendimiento	Precio
A	6	1
B	8	$1,2$

Función Objetivo: Mín $z(x,y) = x + 1,2y$

Sujeto a:

$$\begin{cases} 6x + 8y \geq 480 \\ x + 1,2y \leq 120 \\ x \leq 75 \\ y \leq 75 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x + 4y \geq 240 \\ 5x + 6y \leq 600 \\ x \leq 75 \\ y \leq 75 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Tenemos:



$$\begin{cases} z(0,75) = 90 \\ z(0,60) = 72 \\ z(30,75) = 120 \\ z(75,75/2) = 120 \\ z(75,15/4) = 79,5 \end{cases}$$

El mínimo coste, de 72 euros, corresponde a la compra de 0 kg del proveedor A y 60 kg del proveedor B.

Problema 2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - a & \text{si} \quad x \leq -1 \\ -3x^2 + b & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ \log x + a & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

1. Calcúlese a, b, para que f sea continua en todos los puntos.

www.musat.net

2. Para $a = 0$, $b = 3$, represéntese gráficamente la función f.

3. Para $a = 0$, $b = 3$, calcúlese la integral definida $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Nota.- La notación log representa logaritmo neperiano.

Solución:

1. En $x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} (2x^2 - a) = 2 - a, \quad \lim_{x \longrightarrow -1^+} (-3x^2 + b) = -3 + b \Longrightarrow a + b = 5$$

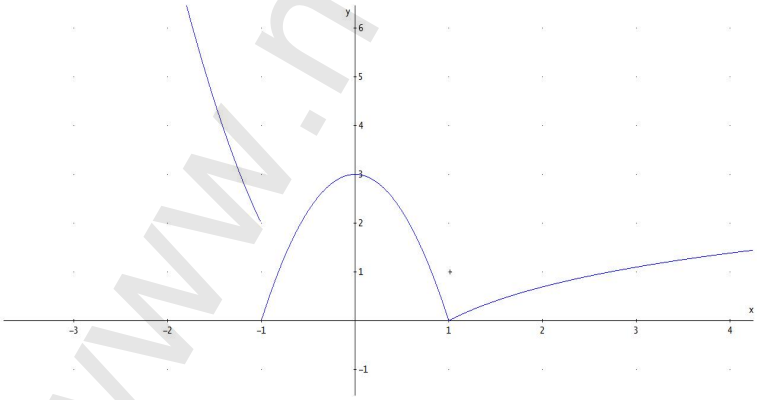
En $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} (-3x^2 + b) = -3 + b, \quad \lim_{x \longrightarrow 1^+} (\log x + a) = a \Longrightarrow a - b = -3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b = 5 \\ a - b = -3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 4 \end{array} \right.$$

2. Tenemos:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 2x^2 & \text{si} & x \leq -1 \\ -3x^2 + 3 & \text{si} & -1 < x < 1 \\ \log x & \text{si} & x \geq 1 \end{array} \right.$$



3.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (-3x^2 + 3)\,dx = -x^3 + 3x\Big]_{-1}^{1} = 4$$

.

Problema 3 *(2 puntos)* Se consideran los siguientes sucesos:

- Suceso A=La economía de un cierto país está en recesión.

www.musat.net

- Suceso B=Un indicador económico muestra que la economía de dicho país está en recesión.

Se sabe que:

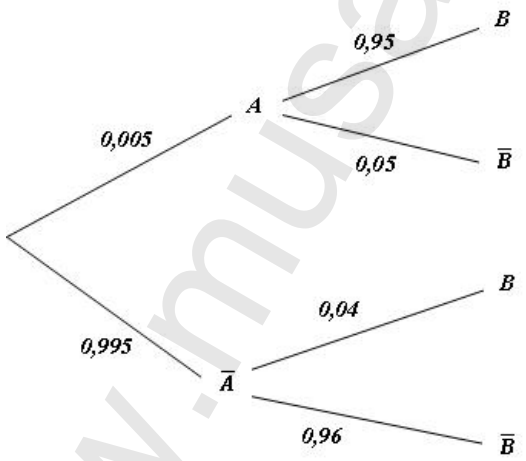
$$P(A) = 0,005, \quad P(B|A) = 0,95, \quad P(\overline{B}|\overline{A}) = 0,96$$

1. Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país no está en recesión y además la economía del país esté en recesión.

2. Calcúlese la probabilidad de que el indicador económico muestre que la economía del país está en recesión.

Nota.- La notación $\overline{A}$ representa el suceso complementario de A.

Solución:



1. $$P(\overline{B} \cap A) = 0,005 \cdot 0,05 = 0,00025$$

2. $$P(B) = 0,005 \cdot 0,95 + 0,995 \cdot 0,04 = 0,04455$$

Problema 4 *(2 puntos)* Para estimar la media de una población con distribución normal de desviación típica igual a 5, se ha extraído una muestra aleatoria simple de tamaño 100, con la que se ha obtenido el intervalo de confianza (173,42;175,56) para dicha media poblacional.

1. Calcúlese la media de la muestra seleccionada.

2. Calcúlese el nivel de confianza del intervalo obtenido.

www.musat.net

Solución:

$$N(\mu, 5), \quad n = 100, \quad (173,42; 175,56)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{X} - z_{\alpha/2}\dfrac{5}{10} = 173,42 \\ \\ \overline{X} + z_{\alpha/2}\dfrac{5}{10} = 175,56 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{X} = 174,49 \\ \\ z_{\alpha/2} = 2{,}14 \end{array} \right.$$

1. $\overline{X} = 174,49$
2. $z_{\alpha/2} = 2{,}14 \Longrightarrow P(Z < 2{,}14) = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow 0,9838 = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,0324 \Longrightarrow NC = 1 - \alpha = 1 - 0,0324 = 0,9676.$

$$\text{Nivel de Confianza} = \ 96,76\,\%$$

www.musat.net