Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2010) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Un club de fútbol dispone de un máximo de 2 millones de euros para fichajes de futbolistas españoles y extranjeros. Se estima que el importe total de las camisetas vendidas por el club con el nombre de futbolistas españoles es igual al 10 % de la cantidad total invertida por el club en fichajes españoles, mientras que el importe total de las camisetas vendidas con el nombre de futbolistas extranjeros es igual al 15 % de la cantidad total invertida por el club en fichajes extranjeros. Los estatutos del club limitan a un máximo de 800000 euros la inversión total en jugadores extranjeros y exigen que la cantidad total invertida en fichajes de españoles ha de ser como mínimo de 500000 euros. Además, la cantidad total invertida en fichajes de españoles ha de ser mayor o igual que la invertida en fichajes extranjeros. ¿Qué cantidad debe invertir el club en cada tipo de fichajes para que el importe de las camisetas vendidas sea máximo? Calcúlese dicho importe máximo. Justifíquese.

Solución:

Sea x cantidad invertida en españoles.

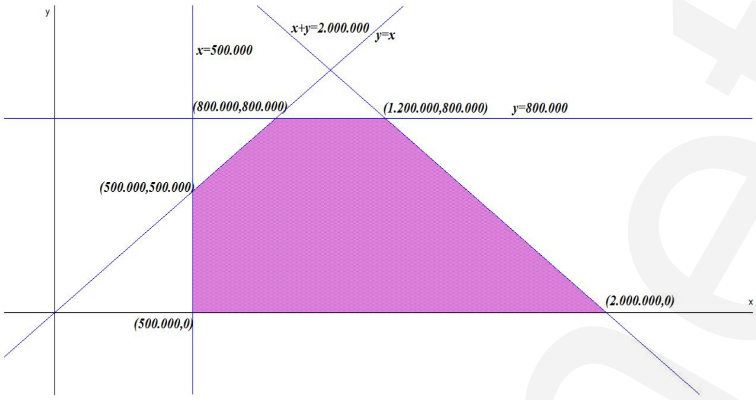
Sea y cantidad invertida en extranjeros.

La función objetivo: $z(x,y) = 0,1x + 0,15y$

Las restricciones serán:

$$\left\{\begin{array}{c} x + y \le 2000000 \\ y \le 800000 \\ x \ge 500000 \\ x \ge y \\ y \ge 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcr} z(800000, 800000) & = & 200000 \\ z(1200000, 800000) & = & 240000 \\ z(500000, 500000) & = & 125000 \\ z(500000, 0) & = & 50000 \\ z(2000000, 0) & = & 200000 \end{array}$$



Luego para obtener el máximo beneficio se deberan invertir 1.200.000 euros en fichajes españoles y 800.000 euros en fichajes extranjeros. El beneficio de esta operación sería de 270.000 euros.

Problema 2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

a) Determínense su asíntotas.

b) Calcúlense sus máximos y mínimos locales. Esbócese la gráfica de f.

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por las rectas verticales $x = 2$, $x = 3$, la gráfica de f y la recta de ecuación $y = x+1$.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: La única posible es $x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^2}{x-1} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n$

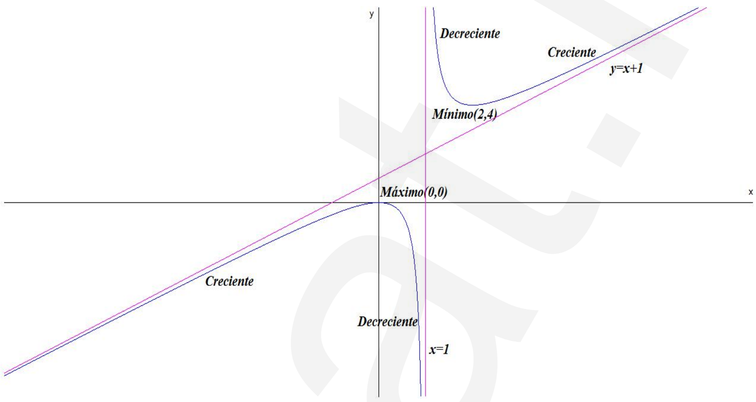
$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1$$

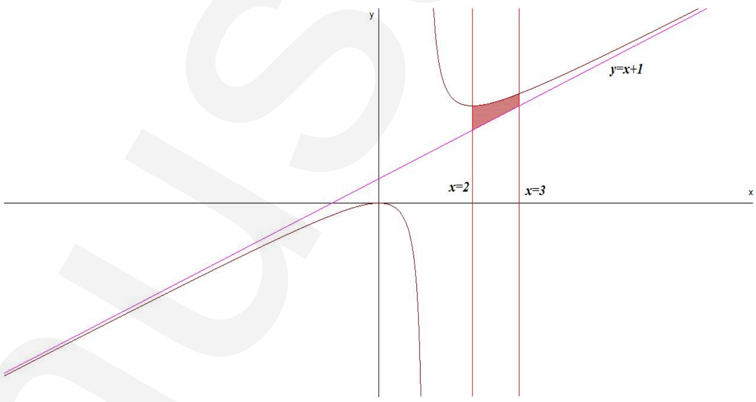
$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = 1$$

La asíntota oblicua es $y = x + 1$

b)

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = 2$$





	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente	Decreciente	Creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, y decreciente en el intervalo $(0, 1) \cup (1, 2)$.

La función tiene un Máximo en el punto $(0,0)$ y un Mínimo en el punto $(2,4)$.

c)

$$S=\int_2^3\left(\frac{x^2}{x-1}-x-1\right)dx=\int_2^3\frac{x^2}{x-1}\,dx=\ln|x-1|]_2^3=\ln 2\ u^2$$

Problema 3 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A)=0,5$; $P(B)=0,4$; $P(A\cap B)=0,1$. Calcúlense las siguientes probabilidades:

$$a)P(A\cup B);\quad b)P(\overline{A}\cup\overline{B});\quad c)P(A|B);\quad d)P(\overline{A}\cap B)$$

Solución:

$a)P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,8$

$b)P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=0,9$

$c)P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=0,25$

$d)P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=0,3$

Problema 4 *(2 puntos)* Se supone que el tiempo de vida útil en miles de horas (Mh) de un cierto modelo de televisor, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 0,5 Mh. Para una muestra aleatoria simple de 4 televisores de dicho modelo, se obtiene una media muestral de 19,84 Mh de vida útil.

a) Hállese un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo de vida útil medio de los televisores de dicho modelo.

b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto del error de la estimación de la media poblacional mediante la media muestral sea inferior a 0,2 Mh con probabilidad mayor o igual que 0,95.

Solución:

a)

$$IC=\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=$$

$$\left(19,84-1,96\frac{0,5}{\sqrt{4}};19,84-1,96\frac{0,5}{\sqrt{4}}\right)=(19,35;20,33)$$

b)

$$E=z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Longrightarrow n=\left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2=\left(\frac{1,96\cdot 0,5}{0,2}\right)^2=24,01$$

El tamaño mínimo muestral debe ser de $n = 25$ televisores.

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2010) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} kx- & 2y+ & 7z= & 8\\ x- & y+ & kz= & 2\\ -x+ & y+ & z= & 2 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema para los distintos valores de k.

b) Resúelvase el sistema para el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resúelvase el sistema para $k = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} k & -2 & 7 & 8\\ 1 & -1 & k & 2\\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)\Longrightarrow |A|=-k^2+k+2=0\Longrightarrow k=-1,\ \ k=2$$

Si $k\neq -1$ y $k\neq 2\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A})=3$ =nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si $k=-1$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & 7 & 8\\ 1 & -1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)\Longrightarrow \left|\begin{array}{rrr} -1 & -2 & 8\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right|=12\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$

Como $\left|\begin{array}{rr} -1 & -2\\ 1 & -1 \end{array}\right|=3\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=2$. Luego el sistema es Incompatible.

Si $k = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Tenemos que : $|c_1c_2c_3| = |c_1c_3c_4| = |c_1c_2c_4| = |c_2c_3c_4| = 0$

$\left| \begin{array}{rr} -2 & 7 \\ -1 & 2 \end{array} \right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ el Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $k = 2$ el sistema es compatible indeterminado:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x- & 2y+ & 7z = & 8 \\ x- & y+ & 2z = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{3} - \lambda \\ \\ y = \lambda \\ \\ z = \dfrac{4}{3} \end{array} \right.$$

c) Si $k = 0$ el sistema es compatible determinado:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} - & 2y+ & 7z = & 8 \\ x- & y & = & 2 \\ -x+ & y+ & z = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 12 \\ y = 4 \\ z = 10 \end{array} \right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} -x^2 - x + a & \text{si} & x \leq 1 \\ \dfrac{3}{bx} & \text{si} & x \leq 1 \end{array} \right.$$

a) Calcúlense los valores de a, b, para que f sea continua y derivable en todos los puntos.

b) Para $a = 6$, $b = 3/4$, determínense los puntos de corte de la gráfica f con los ejes de coordenadas.

c) Para $a = 6$, $b = 3/4$, calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función f, el eje OX y la recta vertical $x = 2$.

Solución:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} -2x - 1 & \text{si} & x \leq 1 \\ -\dfrac{3}{bx^2} & \text{si} & x \leq 1 \end{array} \right.$$

a) Tenemos:

- Continua en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = -2 + a, \quad \lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \frac{3}{b} \Longrightarrow$$

$$-2 + a = \frac{3}{b} \Longrightarrow -2b + ab = 3$$

- Derivable en $x = 1$:

$$f'(1^-) = -3, \quad f'(1^+) = -\frac{3}{b} \Longrightarrow -3 = -\frac{3}{b} \Longrightarrow b = 1$$

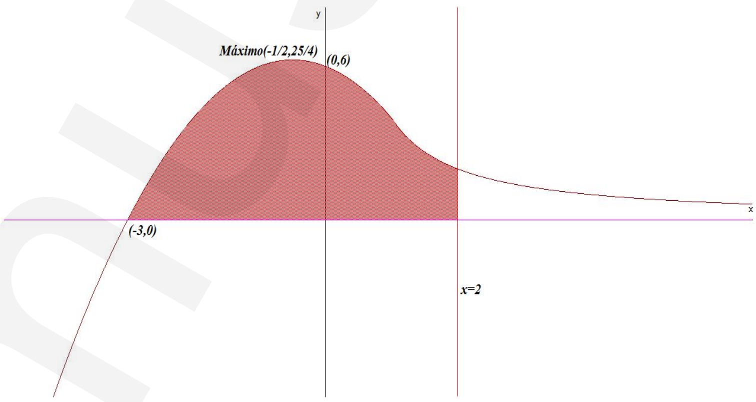
- Continua y derivable en $x = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{c} -2b + ab = 3 \\ b = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = 5 \\ b = 1 \end{array} \right.$$

b) Si $a = 6$, $b = 3/4$:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} -x^2 - x + 6 & \text{si} & x \leq 1 \\ \dfrac{4}{x} & \text{si} & x \leq 1 \end{array} \right.$$

- Corte con el eje OY: hacemos $x = 0$, que estaría en la primera rama y tendríamos el punto $(0, 6)$.
- Corte con el eje OX: hacemos $f(x) = 0$ y tendríamos en la primera rama $-x^2 - x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -3$ y $x = 2$ pero esta última solución no es válida al no estar en la primera rama. Tendríamos el punto $(-3, 0)$



Para dibujar la gráfica observamos que cuando $x \longrightarrow +\infty$: $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{4}{x} = 0 \Longrightarrow y = 0$ es una asíntota horizontal. Si, por el contrario, cuando

$x \longrightarrow -\infty$: $\lim_{x\longrightarrow -\infty}(-x^2 - x + 6) = \infty$ no habría asíntotas. Para calcular los extremos, observamos que la derivada de la segunda rama no puede ser nula y, por el contrario, la derivada de la primera rama se anularía en el punto $x = -1/2$ donde presentaría un máximo.

c)

$$S = \int_{-3}^{1}(-x^2-x+6)\,dx+\int_{1}^{2}\frac{4}{x}\,dx = -\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+6x\Big]_{-3}^{1}+4\ln x]_1^2 = \frac{56}{3}+4\ln 2\ u^2$$

Problema 3 *(2 puntos)* Se dispone de un dado equilibrado de seis caras, que se lanza seis veces con independencia. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los sucesos siguientes:

a) Obtener al menos un seis en el total de los lanzamientos.

b) Obtener un seis en el primer y último lanzamientos y en los restantes lanzamientos un número distinto de seis.

Solución:

- $$P(\text{algún seis}) = 1 - P(\text{ningún seis}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0,6651020233$$

- $$P(6,\overline{6},\overline{6},\overline{6},\overline{6},6) = \left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,01339591906$$

Problema 4 *(2 puntos)* Se supone que el tiempo de espera de una llamada a una línea de atención al cliente de una cierta empresa se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 0,5 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de 100 llamadas y se obtiene un tiempo medio de espera igual a 6 minutos.

a) Determínese un intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de espera de una llamada a dicha línea de atención al cliente.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo que debe observarse para que dicho intervalo de confianza tenga una longitud total igual o inferior a 1 minuto?

Solución:

a)

$$IC = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$\left(6 - 1,96\frac{0,5}{\sqrt{100}}; 6 - 1,96\frac{0,5}{\sqrt{100}}\right) = (5,902; 6,098)$$

b)
$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1,96\cdot 0,5}{0,5}\right)^2 = 3,84$$
El tamaño mínimo muestral debe ser de $n = 4$ llamadas.