

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)
Noviembre 2009

Problema 1 (5 puntos). Considérese el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + y + 3z = 0 \\ x + ay + 2z = 1 \\ x + ay + 3z = -1 \end{cases}$$

1. Discutir sus posibles soluciones según los valores del parámetro a .
2. Resolver el sistema para $a = 1$ y $a = 0$.

Justificar respuesta. (Extremadura (Junio 2008)).

Solución:

1.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & a & 3 & -1 \end{array} \right), \quad |A| = a^2 - 1 = 0 \implies a = \pm 1$$

Si $a \neq \pm 1 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas \implies Sistema Compatible Determinado.

Si $a = -1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{array} \right) \text{ y } \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$$

En este caso $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A}) \implies$ Sistema Incompatible. (No tiene solución)

Si $a = 1$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right) \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

En este caso $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\bar{A}) \implies$ Sistema Incompatible. (No tiene solución)

Si $a = 0$:

$$\begin{cases} y + 3z = 0 \\ x + 2z = 1 \\ x + 3z = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \\ z = -2 \end{cases}$$

Problema 2 (3 puntos). En una fábrica de artículos deportivos se dispone de 10 cajas de diferente tamaño: grandes, medianas y pequeñas para envasar camisetas de atletismo producidas, con capacidad para 50, 30 y 25 camisetas, respectivamente. Si una caja grande fuera mediana, entonces habría el mismo número de grandes y de medianas. En total se envasan 390 camisetas. Determinar el número de cajas que hay de cada clase.

(Castilla La Mancha (Junio 2008))

Solución:

Sea x el n^o cajas grandes, y el n^o de cajas medianas y z el n^o de cajas pequeñas.

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x - 1 = y + 1 \implies x - y = 2 \\ 50x + 30y + 25z = 390 \implies 10x + 6y + 5z = 78 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

Problema 3 (2 puntos). Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular A^n .

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$