

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CN)

Marzo 2010

Problema 1 (2 puntos). Se pide:

- ¿Son coplanarios los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(3, 1, 0)$, $C(1, 1, 1)$ y $D(3, 0, -1)$?
En caso afirmativo, calcula la distancia del origen de coordenadas al plano que los contiene.
- Calcula el punto simétrico del punto $P(0, 0, 1)$ respecto del plano $\pi : x - 2y + 2z - 1 = 0$

Solución:

- Construimos los vectores $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 1)$, estos dos vectores con A determinan el plano $\pi : x - 2y + 2z - 1 = 0$. Ahora comprobamos si el punto D pertenece al plano $\pi \implies 3 - 0 - 2 - 1 = 0$

$$\pi : \begin{vmatrix} 2 & 0 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \implies \pi : x - 2y - 2z - 1 = 0$$

Otra manera de ver si son coplanarios es construyendo el vector $\overrightarrow{AD} = (2, 0, -1)$ y tenemos

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{linealmente dependientes}$$

$$d(O, \pi) = \frac{|-1|}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3} u$$

- Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta t perpendicular a π que pase por P :

$$t : \begin{cases} \overrightarrow{u}_t = (1, -2, 2) \\ P_t(0, 0, 1) \end{cases} \implies t : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto P' de corte de t con π :

$$\lambda + 4\lambda + 2(1 + 2\lambda) - 1 = 0 \implies \lambda = -\frac{1}{9} \implies P' \left(-\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9} \right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P'' (el simétrico que buscamos) y P :

$$\frac{P + P''}{2} = P' \implies P'' = 2P' - P = 2\left(-\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right) - (0, 0, 1) = \left(-\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$$

Galicia (Junio 2008)

Problema 2 (3 puntos). Se consideran las rectas

$$r : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{1} \quad s : \frac{x+1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-3}$$

1. Demostrar que se cruzan y calcular la distancia mínima entre ellas.
2. Hallar un vector director de la recta perpendicular a ambas.
3. Encontrar una recta perpendicular a ambas rectas y que las corte.

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (3, 3, 1) \\ P_r(1, -2, 2) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (3, 4, -3) \\ P_s(-1, 0, 1) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_s P_r} = (2, -2, 1)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -47 \neq 0 \implies \text{Se cruzan}$$

$$|\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} \right| = |(-13, 12, 3)| = \sqrt{322}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_s P_r}]|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{47}{\sqrt{322}} = \frac{47\sqrt{322}}{322} u$$

2.

$$u_t : \vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix} = (-13, 12, 3)$$

3. Como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \vec{u}_r = (3, 3, 1) \\ \vec{u}_t = (-13, 12, 3) \\ P_r(1, -2, 2) \end{cases} \implies \pi_1 : \begin{vmatrix} 3 & -13 & x-1 \\ 3 & 12 & y+2 \\ 1 & 3 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi_1 : 3x + 22y - 75z + 191 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_s = (3, 4, -3) \\ \vec{u}_t = (-13, 12, 3) \\ P_s(-1, 0, 1) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 3 & -13 & x+1 \\ 4 & 12 & y \\ -3 & 3 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi_2 : 24x + 15y + 44z - 20 = 0$$

La recta t que buscamos es la definida como corte de dos planos:

$$t : \begin{cases} 3x + 22y - 75z + 191 = 0 \\ 24x + 15y + 44z - 20 = 0 \end{cases}$$

Islas Baleares (Junio 2008)

Problema 3 (2 puntos). Se consideran la recta $r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$, el plano $\pi : 2x - 4y - 2z = 0$ y el punto $P(1, 1, 1)$. Se pide:

1. Determinar la ecuación del plano π_1 que pasa por el punto P y es paralelo a π .
2. Determinar la ecuación general del plano π_2 que contiene a la recta r y pasa por el punto P .

Solución:

1. $\pi_1 : 2x - 4y - 2z + \lambda = 0$ y como contiene a $P \implies 2 - 4 - 2 + \lambda = 0 \implies \lambda = 4$, luego $\pi_1 : 2x - 4y - 2z + 4 = 0$

2.

$$\pi_2 : \begin{cases} \vec{u}_r = (1, 2, 3) \\ \vec{PP}_r = (1, 1, 2) \\ P(1, 1, 1) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 1 & x-1 \\ 2 & 1 & y-1 \\ 3 & 2 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi_2 : x + y - z - 1 = 0$$

Islas Canarias (Junio 2008)

Problema 4 (3 puntos). Halla la ecuación del plano π que pasa por el punto $P(3, -1, 4)$ y es paralelo a las rectas

$$r_1 : \begin{cases} 5x - y + 3z - 4 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad r_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-3}$$

Solución:

$$r : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, -3) \\ P_r(1, 1, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 2, -3) \\ P_s(-1, 2, -2) \end{cases}$$

$$\pi : \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, -3) \\ \vec{u}_s = (1, 2, -3) \\ P(3, -1, 4) \end{cases} \implies \pi_2 : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x-3 \\ 1 & 2 & y+1 \\ -3 & -3 & z-4 \end{vmatrix} = 0 \implies$$
$$\pi_2 : x + y + z - 6 = 0$$

Navarra (Junio 2008)