Examen de Matemáticas II (Modelo 2010)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = e^x + a\,e^{-x},$$

siendo a un número real, estudiar los siguientes apartados en función de a:

a) (1,5 puntos). Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) (1 punto). Estudiar para que valor , o valores, de a la función f tiene alguna asíntota horizontal.

c) (0,5 puntos) Para $a \geq 0$, hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

Solución:

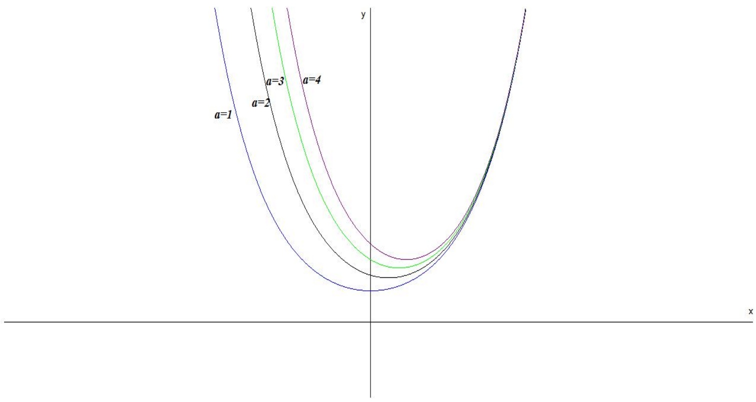
a) $f'(x) = e^x - a\,e^{-x} = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{\ln a}{2}$

- Si $a > 0$:

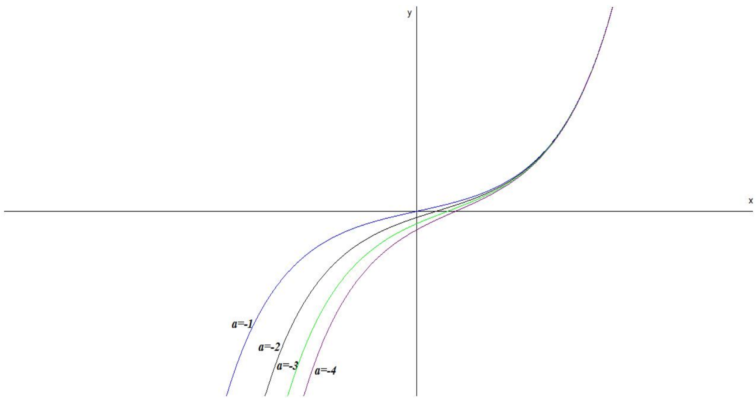
	$(-\infty, \ln a/2)$	$(\ln a/2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Decreciente	Creciente

La función es decreciente en el inetrvalo $(-\infty, \ln a/2)$ y creciente en el $(\ln a/2, \infty)$.

La función tiene un mínimo en el punto $\left(\dfrac{\ln a}{2}, 2\sqrt{a}\right)$



- Si $a \leq 0 \Longrightarrow \ln a$ no existe, luego no hay extremos. Por otro lado $f'(x) > 0,\ \forall x \in R \Longrightarrow$ la función es siempre creciente.



b)

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{e^{2x}-a}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{2e^{2x}}{e^x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} 2e^x = \infty$$

En este caso no hay asíntotas horizontales sea cual sea el valor de a.

Cuando $x \longrightarrow -\infty$:

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{e^{2x}-a}{e^x} = \left[\frac{\infty}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow\infty} (e^{-x}+a\,e^x) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{1+ae^{2x}}{e^x} = \infty \text{ si } a \neq 0$$

Es decir, no hay asíntotas horizontales en este caso siempre que $a \neq 0$.
Si $a = 0$:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{1+ae^{2x}}{e^x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

En este caso hay una síntota horizontal para $y = 0$.

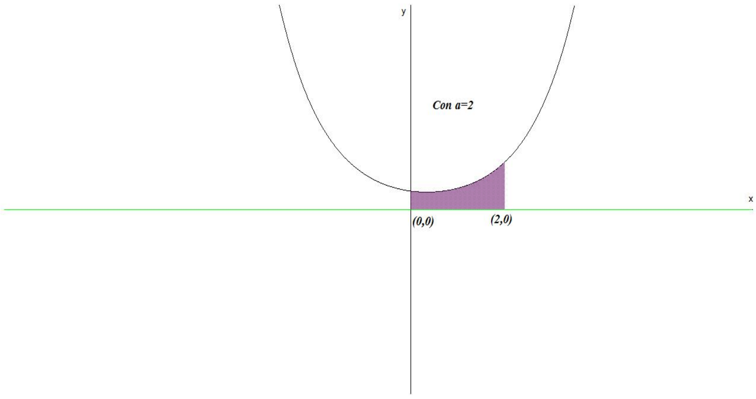
c) Con $a > 0$:

$$S = \int_0^2 (e^x + a\,e^{-x})\,dx = \left. e^x - a\,e^{-x}\right]_0^2 = a(1-e^{-2}) + e^2 - 1\,u^2$$

Problema 2 *(3 puntos)* Se consideran las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

$$s \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$



a) (1,5 puntos). Determinar la ecuación de la recta t que corta a r y s, y que contiene al origen de coordenadas.

b) (1,5 puntos). Determinar la mínima distancia entre las rectas r y s.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, -2) \\ P_r(0, 1, 2) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (6, 2, 2) = 2(3, 1, 1) \\ P_s(5, 0, -1) \end{cases}$$

a)

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, -2) \\ \overrightarrow{OP_r} = (0, 1, 2) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -2 & 2 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 4x + 2y - z = 0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (3, 1, 1) \\ \overrightarrow{OP_s} = (5, 0, -1) \\ O(0, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 3 & 5 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow -x + 8y - 5z = 0$$

$$t : \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ x - 8y + 5z = 0 \end{cases}$$

b) $\overrightarrow{P_rP_s} = (5, -1, -3)$

$$|[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}]| = |\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}| = 64 \Longrightarrow \text{se cruzan}$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}| = |(6, -10, -8)| = 2|(3, -5, -4)| = 10\sqrt{2}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{64}{10\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{5}\ u$$

Problema 3 *(2 puntos)* Obtener, para todo número natural n, el valor de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Solución:

Si $n = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si $n = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si $n = 3$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Si $n = n$

$$\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Problema 4 *(2 puntos)* Discutir razonadamente, en función del parámetro k, el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & ky+ & z = & k+2 \\ kx+ & y+ & z = & k \\ x+ & y+ & kz = & -2(k+1) \end{array} \right.$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & k+2 \\ k & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k & -2(k+1) \end{array} \right) \quad |A| = -k^3 + 3k - 2 = 0 \Longrightarrow k = 1 \;\; k = -2$$

- Si $k \neq 1$ y $k \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3 =$n$^{\underline{o}}$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $k = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Sistema es Incompatible.

- Si $k=-2$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos:

$$F_3=-(F_1+F_2)\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Rango}(\overline{A})=2\\ \text{Rango}(A)=2\end{array}\right.\Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado.

Examen de Matemáticas II (Modelo 2010) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x)=x^3-x$$

Se pide:

a) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(-1,f(-1))$.

b) (1 punto). Determinar los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de f.

c) (1 punto). Calcular el área de la región acotada que está comprendida entre la gráfica de f y la recta obtenida en el apartado anterior.

Solución:

a) $f(-1)=0$. El punto de tangencia es el $(-1,0)$. $f'(x)=3x^2-1\Longrightarrow m=f'(-1)=2$. Luego la recta tangente es:

$$y=2(x+1)\Longrightarrow 2x-y+2=0$$

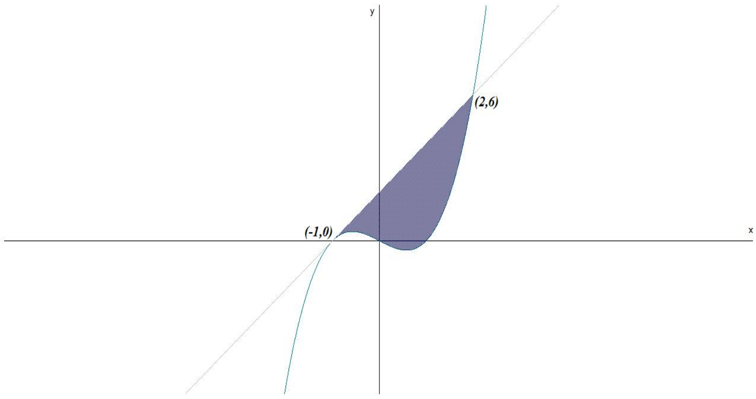
b) Para encontrar los puntos de intersección lo hacemos por igualación:

$$x^3-x=2x+2\Longrightarrow x=-1,\;\; x=2$$

Los puntos de intersección son: $(-1,0)$ y $(2,6)$.

c)

$$S=\int_{-1}^{2}(2x+2-x^3+x)\,dx=\int_{-1}^{2}(-x^3+3x+2)\,dx=-\frac{x^4}{4}+3\frac{x^2}{2}+2x\Big]_{-1}^{2}=\frac{27}{4}\;u^2$$



Problema 2 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & & z= & 2\\ x+ & \lambda y- & z= & 4\\ -\lambda x- & y- & z= & -5 \end{array}\right.$$

a) (1 punto). Discutirlo para los distintos valores del parámetro λ

b) (1 punto). Resolverlo cuando el sistema sea compatible indeterminado.

c) (1 punto). Resolverlo para $\lambda = -2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & \lambda & -1 & 4\\ -\lambda & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) \quad |A| = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \;\; \lambda = 2$$

- Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A})$ = 3 =nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $\lambda = -1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1 & 4\\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 3\\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

Sistema es Incompatible.

- Si $\lambda = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado.

b) El sistema es compatible indeterminado cuando $\lambda = 2$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & & z = & 2 \\ x+ & 2y- & z = & 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

c)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & & z = & 2 \\ x- & 2y- & z = & 4 \\ 2x- & y- & z = & -5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -3 \\ y = -6 \\ z = 5 \end{array}\right.$$

Problema 3 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(2, 2, 3)$ y $B(0, -2, 1)$, hallar el punto, o los puntos, de la recta:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{2}$$

que equidistan de A y de B.

Solución:

$$r : \left\{\begin{array}{l} x = 2 + 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{AP} = (3\lambda, -2 - \lambda, 1 + 2\lambda), \quad \overrightarrow{BP} = (2 - 3\lambda, 2 - \lambda, 3 + 2\lambda)$$

$$|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \Longrightarrow$$

$$\sqrt{(3\lambda)^2 + (-2 - \lambda)^2 + (1 + 2\lambda)^2} = \sqrt{(2 + 3\lambda)^2 + (2 - \lambda)^2 + (3 + 2\lambda)^2} \Longrightarrow$$

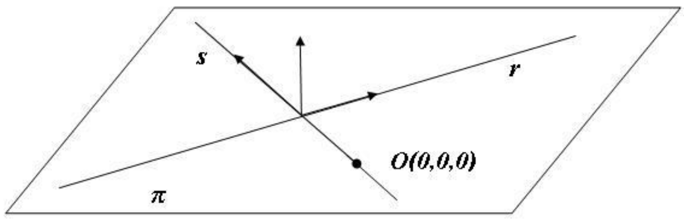
$$\lambda = -1 \Longrightarrow (-1, 1, 2)$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv 5x - 4y + z = 0$ y la recta:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

contenida en π, obtener la recta s contenida en π que es perpendicular a r, y que pasa por el origen de coordenada $O(0, 0, 0)$.

Solución:



$$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{u_\pi}\times\overrightarrow{u_r}=(1,1,-1)\\ O(0,0,0)\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{u_\pi}\times\overrightarrow{u_r}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 5 & -4 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=-14(1,1,-1)$$

$$s:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$$