Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2009) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & kz= & 4 \\ 2x- & y+ & 2z= & 5 \\ -x+ & 3y- & z= & 0 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema para los distintos valores del parámetro k.

b) Resúelvase el sistema para el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resúelvase el sistema para $k = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & k & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 5k - 5 = 0 \Longrightarrow k = 1$$

Si $k \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3$ =nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si $k = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Como $\left|\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array}\right| = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$. Luego el sistema es Compatible Indeterminado.

b) Si $k = 1$

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & z= & 4 \\ 2x- & y+ & 2z= & 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

c) Si $k = 0$

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & = & 4 \\ 2x- & y+ & 2z= & 5 \\ -x+ & 3y- & z= & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

www.musat.net

Problema 2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = (x^2 - 1)^2$$

a) Determínense los extremos relativos de f.

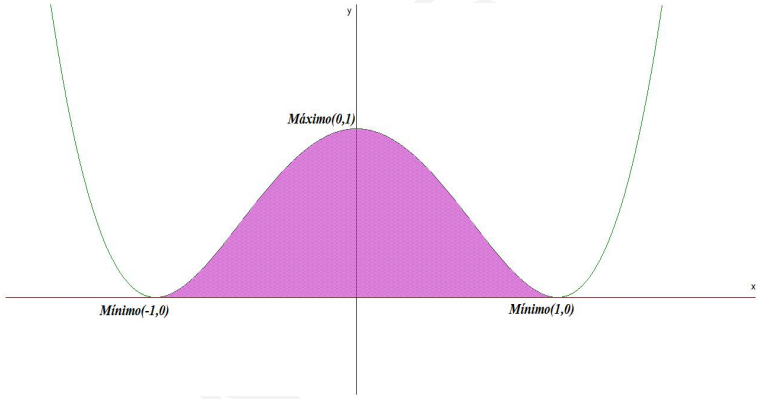
b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = 3$.

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por las gráficas de f y el eje OX.

Solución:

a) $f'(x) = 4x(x^2 - 1) = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente



La función es creciente en el intervalo $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ y es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

La función presenta un máximo en el punto $(0, 1)$ y dos mínimos en los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

b) $a = 3 \Longrightarrow f(3) = 64, m = f'(3) = 96$. La ecuación de la recta tangente pedida es:

$$y - 64 = 96(x - 3) \Longrightarrow 96x - y - 224 = 0$$

-

$$S_1 = \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2 + 1)\, dx = \left[\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^{1} = \frac{16}{15}\, u^2$$

$$S = |S_1| = \frac{16}{15}\ u^2$$

Problema 3 *(2 puntos)* Se consideran tres sucesos A, B y C de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = \frac{1}{2};\ \ P(B) = \frac{1}{3};\ \ P(C) = \frac{1}{4};$$

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{2}{3};\ \ P(A \cap B \cap C) = 0;\ \ P(A|B) = P(C|A) = \frac{1}{2}$$

a) Calcúlese $P(C \cap B)$.

b) Calcúlese $P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})$. La notación $\overline{A}$ representa al suceso complementario de A.

Solución:

a)

$$P(A \cup B \cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B)-P(A \cap C)-P(B \cap C)+P(A \cap B \cap C)$$

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P(C \cap A) = P(C|A)P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - P(B \cap C) + 0 \Longrightarrow P(B \cap C) = 0$$

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) = P(\overline{A \cap B \cap C}) = 1 - P(A \cap B \cap C) = 1$

Problema 4 *(2 puntos)* Se supone que el gasto mensual dedicado al ocio por una determinada familia de un determinado país se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 55 euros. Se ha elegido una muestra aleatoria de 81 familias, obteniéndose un gasto medio de 320 euros.

a) ¿Se puede asegurar que el valor absoluto del error de la estimación del gasto medio por familia mediante la media de la muestra es menor que 10 euros con un grado de confianza del 95 %?

b) ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo que debe tomarse para poder asegurarlo?

Solución:

www.musat.net

a)

$$N(\mu, 55), \quad n = 81, \quad z_{\alpha/2} = 1{,}96$$

$$P\left(\left|\overline{X} - \lambda\right| \leq 10\right) \geq 0{,}95 \Longrightarrow P\left(\left|\overline{X} - \lambda\right| \leq 10\right) = P\left(|Z| \leq \frac{10}{55/\sqrt{81}}\right) =$$

$$P\left(|Z| \leq 1{,}64\right) = 0{,}9495 \leq 0{,}95$$

No podemos asegurar esa hipótesis.

b)

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 116,2084 \Longrightarrow n = 117$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2009) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Una refinería utiliza dos tipos de petróleo, A yB, que compra a un precio de 350 euros y 400 euros por tonelada, respectivamente. Por cada tonelada de tipo A que refina, obtiene 0,10 toneladas de gasolina y 0,35 toneladas de fuel-oil. Por cada tonelada de tipo B que refina, obtiene 0,05 toneladas de gasolina y 0,55 toneladas de fuel-oil. Para cubrir sus necesidades necesita obtener al menos 10 toneladas de gasolina y al menos 50 toneladas de fuel-oil. Por cuestiones de capacidad, no puede comprar más de 100 toneladas de cada tipo de petróleo. ¿Cuántas toneladas de petróleo de cada tipo debe comprar la refinería para cubrir sus necesidades a mínimo coste? Determinar dicho coste mínimo.

Solución:

Sea x cantidad de petróleo tipo A.

Sea y cantidad de petróleo tipo B.

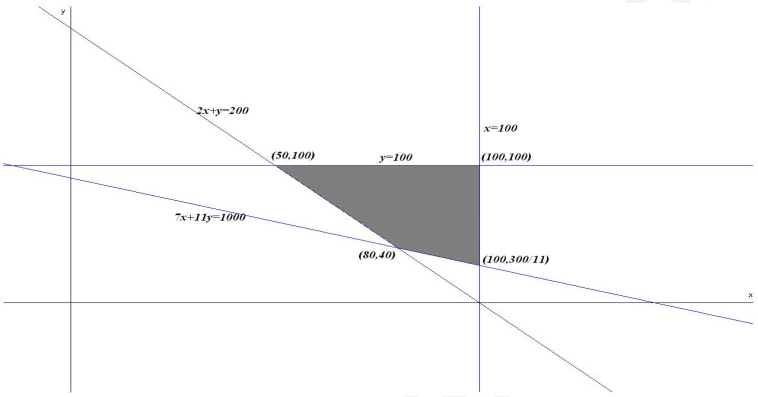
	Gasolina	Fuel − oil	Coste
A	$0,1$	$0,35$	350
B	$0,05$	$0,55$	400
Total	10	50	

La función objetivo: $z(x, y) = 350x + 400y$

www.matsalnet

Las restricciones serán:

$$\begin{cases} 0,1x + 0,05y \geq 10 \\ 0,35x + 0,55y \geq 50 \\ x \leq 100 \\ y \leq 100 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x + y \geq 200 \\ 7x + 11y \geq 1000 \\ x \leq 100 \\ y \leq 100 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{array}{rcr} z(80,40) & = & 44000 \\ z(50,100) & = & 57500 \\ z(100,300/11) & = & 45909,09 \\ z(100,100) & = & 75000 \end{array}$$

Luego para obtener el mínimo coste se deberán comprar 80 toneladas del petróleo tipo A y 40 toneladas del tipo B, con un coste de 44000 euros.

Problema 2 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x - a}$$

a) Determínese las asíntotas de f, especificando los valores del parámetro real a para los cuales f tiene una asíntota vertical, dos asíntotas verticales, o bien no tiene asíntotas verticales.

b) Para $a = -1$, calcúlense los valores reales de b para los cuales se verifica que $\displaystyle\int_0^b f(x)\,dx = 0$

Solución:

a) Para que f tenga asíntotas verticales $x^2 - x - a = 0 \Longrightarrow$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

www.ausa.es

- Si $a = -1/4$ la única asíntota vertical que hay es $x = \dfrac{1}{2}$
- Si $a < -1/4 \Longrightarrow 1 + 4a < 0 \Longrightarrow$ no hay asíntotas verticales.
- Si $a > -1/4 \Longrightarrow 1 + 4a > 0 \Longrightarrow$ hay dos asíntotas verticales:

$$x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}, \quad x = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

b)

$$\int_0^b \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}\, dx = \ln|x^2 - x + 1|\,]_0^b = \ln(b^2 - b + 1) = 0 \Longrightarrow$$

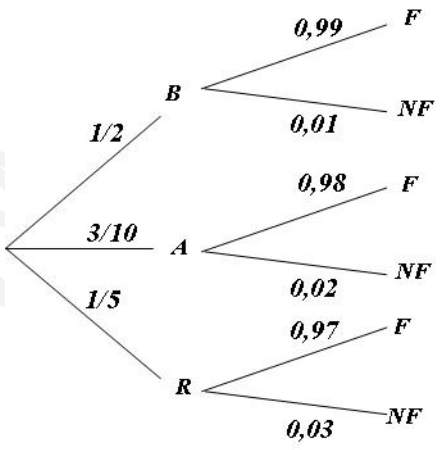
$$b^2 - b + 1 = 1 \Longrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

Problema 3 *(2 puntos)* Para la construcción de un luminoso de feria se dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 120 bombillas azules y 80 bombillas rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es igual a 0,01 si la bombilla es es blanca, es igual a 0,02 si la bombilla es azul y 0,03 si la bombilla es roja. Se elige al azar una bombilla del contenedor.

a) Calcúlese la probabilidad de que la bombilla elegida no funcione.

b) Sabiendo que la bombilla elegida no funciona, calcúlese la probabilidad de que dicha bombilla sea de color azul

Solución:



$$P(B) = \frac{200}{400} = \frac{1}{2}, \;\; P(A) = \frac{120}{400} = \frac{3}{10}, \;\; P(R) = \frac{80}{400} = \frac{1}{5}$$

www.mujat.net

- $$P(NF) = \frac{1}{2} \cdot 0,01 + \frac{3}{10} \cdot 0,02 + \frac{1}{5} \cdot 0,03 = 0,017$$

- $$P(A|NF) = \frac{P(NF|A) \cdot P(A)}{P(NF)} = \frac{0,02 \cdot 3/10}{0,017} = 0,35294$$

Problema 4 *(2 puntos)* Se supone que la cantidad de agua (en litros) recogida cada día en una estación metereológica se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 2 litros. Se elige una muestra aleatoria simple y se obtiene las siguientes cantidades de agua recogidas cada día (en litros):

$$9,1;\ 4,9;\ 7,3;\ 2,8;\ 5,5;\ 6,0;\ 3,7;\ 8,6;\ 4,5;\ 7,6$$

a) Determínese un intervalo de confianza para la cantidad media de agua recogida cada día en dicha estación, con un grado de confianza del 95 %.

b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para que al estimar la media del agua recogida cada día en la estación meterelógica mediante dicha muestra, la diferencia en valor absoluto entre ambos valores sea inferior a 1 litro, con un grado de confianza del 98 %.

Solución:

a) $N(\mu, 2)$, $n = 10$, $\overline{X} = 6$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$:

$$IC = \left((\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (4{,}76039, 7{,}23961)$$

b) $E = 1$ y $z_{\alpha/2} = 2{,}325$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 21{,}6225$$

Como n tiene que ser un número natural $n = 22$.

www.musat.net